Waist of knots

駒澤大学総合教育研究部自然科学部門
小沢　誠

K を 3 次元球面 S^3 内の非自明な結び目とする。このとき、トーラス $\partial N(K)$ は $S^3 - K$ 内で圧縮不可能である。従って、$S^3 - K$ は少なくとも一つの圧縮不可能閉曲面を含む。F を $S^3 - K$ 内の圧縮不可能閉曲面とする。S^3 内の任意の閉曲面は圧縮可能であるので、F に対して圧縮ディスク D が存在する。D は K と横断的に交わるとしてよい。F の全ての圧縮ディスク D に関して D と K の交点数 $|D \cap K|$ の最小値を F の **waist** といい、$w(F)$ で表す。また、$S^3 - K$ 内の全ての圧縮不可能閉曲面 F に関して $w(F)$ の最大値を K の **waist** といい、$w(K)$ で表す。自明な結び目 K に対しては、$w(K) = 0$ と定める。

$$w(K) = \max_F \min_D |D \cap K|$$

例１. K をサテライト結び目とし、T を K のコンパニオントーラスとする。T に関する K の巻き付き数は、$w(T)$ に等しい。

例１から分かる様に、$w(K)$ は K が**どれだけ束になって結ばれているか**を測る量である。

例２. Menasco のメリディアン補題（[1]）より、交代結び目 K に対しては、$w(K) = 1$ である。これは、交代結び目が束になって結ばれていないことを意味している。

定理１. $w(K) = 1$ とする。このとき、K の外部 $E(K)$ 内に適切に埋め込まれた、有限スロープの境界を持つ圧縮不可能曲面 F は自由である。即ち、$E(K) - \mathrm{intN(F)}$ の各成分はハンドル体である。

定理２. $b(K)$ を K の橋指数、[ ] をガウス記号とするとき、

$$w(K) \leq \left[\frac{2b(K)}{3} \right]$$

参考文献

[1] W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology **23** (1984) 37-44.

注１． 定理２は $b(K) \equiv 0$ 又は $1 \pmod 3$ のとき最適である。実際、図１の３橋結び目を K とし、種数２の圧縮不可能閉曲面を F とすると、$b(K) = 3$ かつ $w(F) = 2$ が成り立つ。更に、K の $(n, *)$ ケーブル結び目を K^n とすると、$b(K^n) = 3n$ かつ $w(F) = 2n$ が成り立つ。従って、$b(K) \equiv 0 \pmod 3$ のとき最適である。また、一般に、$w(K_1 \# K_2) = \max\{w(K_1), w(K_2)\}$ が成り立つので、任意の２橋結び目 K' に対し、$b(K^n \# K') = 3n+1$ かつ $w(F) = 2n$ が成り立つ。従って、$b(K) \equiv 1 \pmod 3$ のとき最適である。$b(K) \equiv 2 \pmod 3$ のときは、最適でないと予想する。[1]

予想１． $b(K) \geq 3$ のとき、

$$w(K) \leq 2 \left[\frac{b(K)}{3} \right]$$

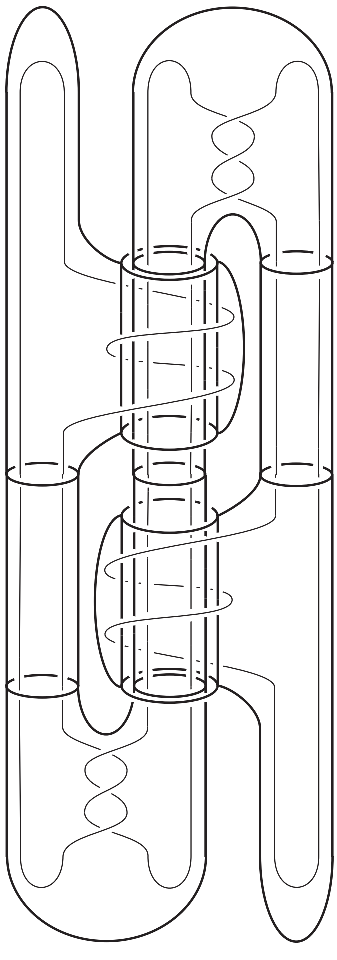

図 1: 3 橋結び目と種数２の圧縮不可能閉曲面

[1] アブストラクト提出後、定理２が最良であることが判明した。