Position and surfaces for knots

I, II

小沢　誠
（駒澤大学総合教育研究部自然科学部門）

2006年11月4日

不変量とは何か？

$X,\ Y$ ： 集合
$\sim_X,\ \sim_Y$ ： 同値関係
$\phi : X \to Y$ ： 写像

ϕが**不変量** $\iff$ $\forall x_1,\ \forall x_2 \in X,$
$$x_1 \sim_X x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \sim_Y \phi(x_2)$$

一般には、良く分からない集合Xから良く分かる集合Yへの写像を考える。

絡み目外部の基本群と周辺構造は、絡み目の完全不変量である。

F. Waldhausen, *On irredubible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. **87** (1968) 56-88.

不変量を用いない結び目理論

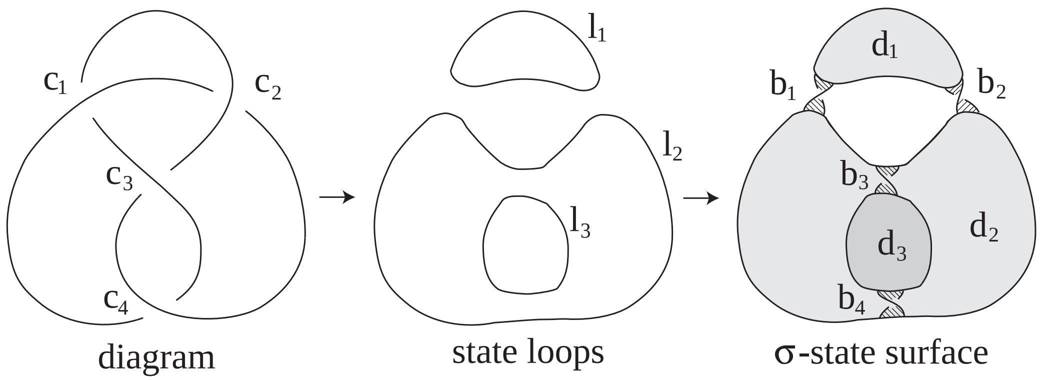
1. Surface
   - Embedded surface, Immersed surface
   - Branched surface
   - Lamination
   - Foliation
2. Structure
   - Foliation
   - Contact structure
   - Hyperbolic structure
3. Geometric Knot Theory
   - Energy
   - Ideal knot
   - Polygonal Knot
   - Quadrisecant, Tritangent Plane
   - Ropelength, Thickness
4. Riemannian geometry
   - Total curvature
   - Ricci Flow

この講演では、Embedded surfaceのみに焦点を当てて解説する。

結び目の位置と曲面

結び目を “良い位置” に配置することで、

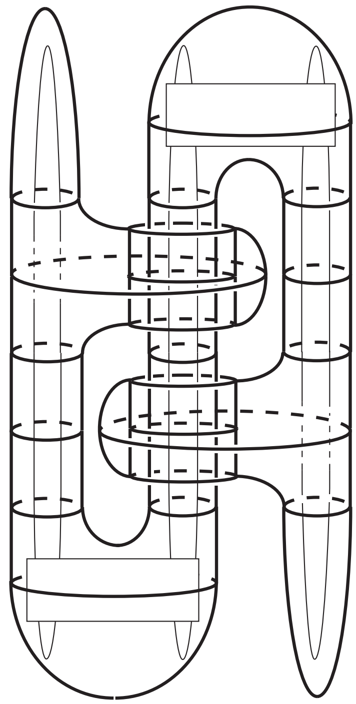
- 曲面を作り出す。



正則表示という位置に置くことで、結び目を境界とする曲面を任意のステイトから構成することができる。以下の論文では、この曲面が本質的となる十分条件が与えられている。

M. Ozawa, *Essential state surfaces for knots and links*, math.GT/0609166

- 曲面の位置を限定する。



ある高さ関数に関して、極大点の個数が最小となるような位置に置く。更に、結び目補空間の本質的閉曲面を臨界点が最小となるようにしておく。このとき、結び目の**位置**から曲面の**位置**が制限される。図の例では、結び目の極大点が３個、閉曲面の種数が２の場合の状況が描かれている。

逆に、このような閉曲面が存在するならば、結び目の極大点の個数を２個にできないなどと、曲面の**位置**から結び目の**位置**が制限されることになる。

目次

1. 結び目の基本構造
   - (a) 結び目補空間定理
   - (b) トーラス結び目・サテライト結び目・双曲結び目
   - (c) トーラスと Conway 球面による標準的分解
2. 本質的曲面
   - (a) 内在的性質と外在的性質
   - (b) 結び目補空間内の本質的曲面
   - (c) Seifert 曲面とその応用
   - (d) 閉曲面、補間曲面
   - (e) タングル分解
   - (f) Dehn 手術
3. Morse 関数と Heegaard 分解
   - (a) Thin position
   - (b) Braid presentation
   - (c) Unknotting tunnel (Heegaard splitting of knot exterior)
   - (d) Fibered knot (Circle valued Morse theory)
4. Diagram
   - (a) alternating knot
   - (b) positive knot
   - (c) σ-adequate & σ-homogeneous knot

1. 結び目の基本構造

(a) 結び目補空間定理

定理（Gordon-Luecke）

$$E(K_1) \cong E(K_2) \iff K_1 \cong K_2$$

S^3内のnon-trivial knot Kに対して、$E(K)$のS^3への埋め込みが一意的であることを示せば良い。
つまり、$E(K)$をS^3に埋め込んだ時に、メリディアンが埋め込みに依らず一意的であることを示す。

もし一意的でないとすると、異なるメリディアンを境界スロープとして持つplanar surface P, Qが存在する。
結び目のThin positionを用いると、$P \cap Q$の任意のarcはPでもQでもessentialとできる。

G_Pがall typesを表すか、G_QがScharlemann cycleを含み、$H_1(S^3)$がtorsionを持つか、S^3がlens space summandを持つので、矛盾が生じる。

C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 371-415.

S^3を向き付け可能閉３次元多様体へ拡張した予想については未解決である。

Oriented knot complement conjecture

If K_1 and K_2 are knots in a closed, oriented 3-manifold M whose complements are homeomorphic via an orientation-preserving homeomorphism, then there exists an orientation-preserving homeomorphism of M taking K_1 to K_2.

絡み目については一般に成り立たないが、特殊な絡み目については成り立つことが示されている。

定理（B. Mangum and T. Stanford）

L_1，L_2 : homologically trivial かつ Brunnian link

$E(L_1) \cong E(L_2) \iff L_1 \cong L_2$

B. Mangum and T. Stanford, *Brunnian links are determined by their complements*, Algebraic & Geometric Topology **1** (2001) 143-152.

(b) トーラス結び目・サテライト結び目・双曲結び目

定義

Kがトーラス結び目
$\iff$ $\exists T \subset S^3$: unknotted torus, s.t. $T \supset K$

定義

Kがサテライト結び目
$\iff$ $\exists T \subset E(K)$: essential torus

定義

Kが双曲結び目
$\iff$ $S^3 - K$が定曲率-1の計量を持つ

定理（W. Thurston）

トーラス結び目、サテライト結び目以外の全ての結び目は、双曲結び目である。

(c) トーラスとConway球面による標準的分解

Step 1： まず、$E(L)$をトーラス分解する。

$E(L)=$(simple pieces)$\cup$(Seifert pieces)

S^3内の任意のトーラスはソリッドトーラスを囲うことから、各pieceはS^3内のある絡み目L'の外部$E(L')$に同相である。

外部がSeifert fiber spaceである絡み目は分類されている。

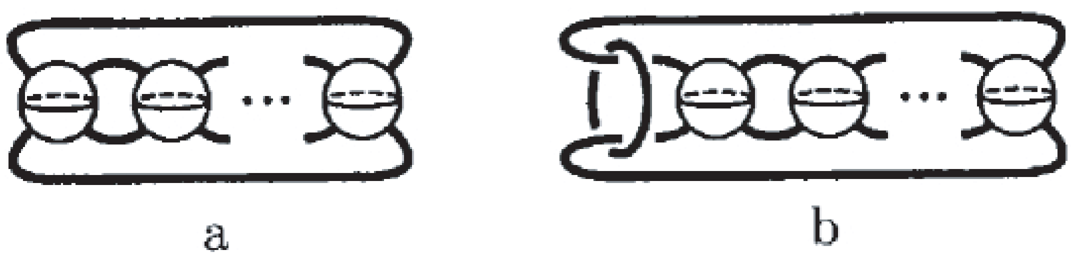
G. Burde and K. Murasugi, *Links and Seifert fiber spaces*, Duke. Math. J. **37** (1970) 89-93.

Step 2： 次に、simple linkをConway sphereにより分解する。

定理（Bonahon and Siebenmann）

$\forall L \subset S^3$: simple link,
$\exists^1 F \subset S^3$: 2-manifold,
s.t.

1. Fの成分は圧縮不可能なConway sphereであり、どの２つも互いにambient isotopicでない。
2. FでS^3を切り開いて得られる3-manifoldの各成分NはConway-simpleであるか、Montesinos pairである。
3. Fからどの成分を取り除いても、性質2は満たされない。



Montesinos pair

F. Bonahon and L. Siebenmann, *Geometric splittings of knots and Conway's algebraic knots*, unpublished.

2. 本質的曲面

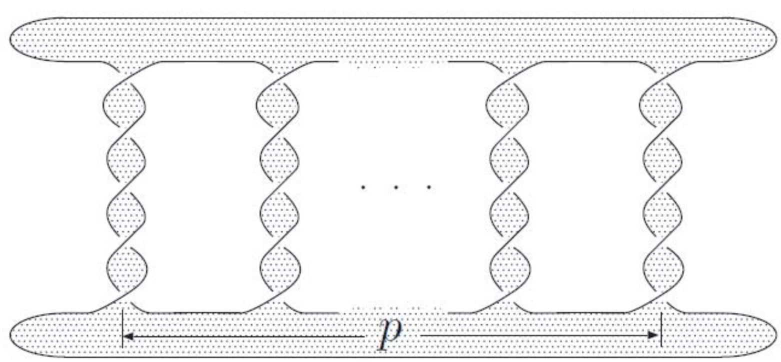
(a) 内在的性質と外在的性質

内在的性質として、向き付け可能・向き付け不可能、種数・ベッチ数、境界成分数などが考えられる。

外在的性質としては、分離的・非分離的、境界スロープが基本的性質であり、また、以下のようなものが考えられる。

定義

$F \subset E(K)$ が **free**
$\iff$ $E(K)$ を F で切り開いて得られる３次元多様体の各成分がハンドル体



A totally geodesic surface (for $p \geq 3$ and odd).

freeの対極にある性質がtotally knottedである。

定義

$F \subset E(K)$が**totally knotted**
$\iff$ $E(K)$をFで切り開いて得られる3次元多様体の各成分が境界既約

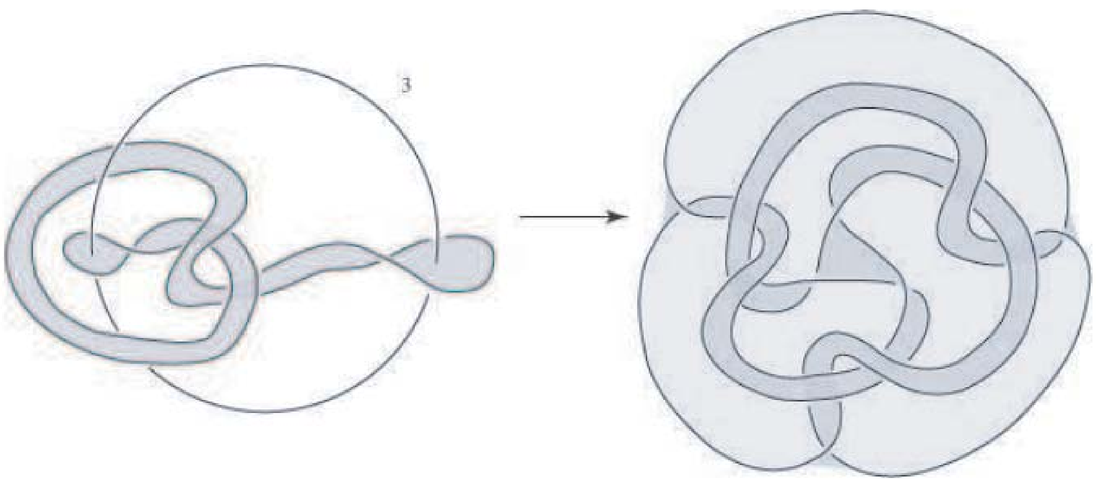


FIGURE 4. A totally knotted Seifert surface which is totally geodesic.

例1

K : alternating knot
$F \subset E(K)$: essential surface with non-meridional boundary slope
$\Rightarrow$ F は free

F が free であることを言うには、$E(K) - F$ 内に closed incompressible surfaceが存在しないことを言えば良い。

alternating knot complement内のclosed incompressible surfaceはmeridionally compressible、つまり、surfaceと K の meridianを繋ぐ annulusが存在するので、non-meridional boundary slopeを持つessential surfaceの補空間にはclosed incompressible surfaceは存在しない。

M. Ozawa, *Essential free decompositions of knot exteriors*,

http://www.komazawa-

u.ac.jp/ w3c/lecture/topology/pdf/efd.pdf

例2

K : knot
s.t. 任意のminimal genus Seifert surfaceがtotally knotted
K' : Kからcrossing changeで得られる任意のknot
$\Rightarrow g(K) \leq g(K')$

Conway triple (K, K', L)を考える。

crossing changeをしてgenusが下がったとすると、KとLのminimal genus Seifert surface FとSで、FはHopf bandをSにplumbingして得られるものが存在する。

このようなFはtotally knottedでないことが分かる。

M. Scharlemann and A. Thompson, *Link genus and the Conway moves*, Comment. Math. Helvetici **64** (1989) 527-535.

結び目補空間内の圧縮不可能曲面の幾何

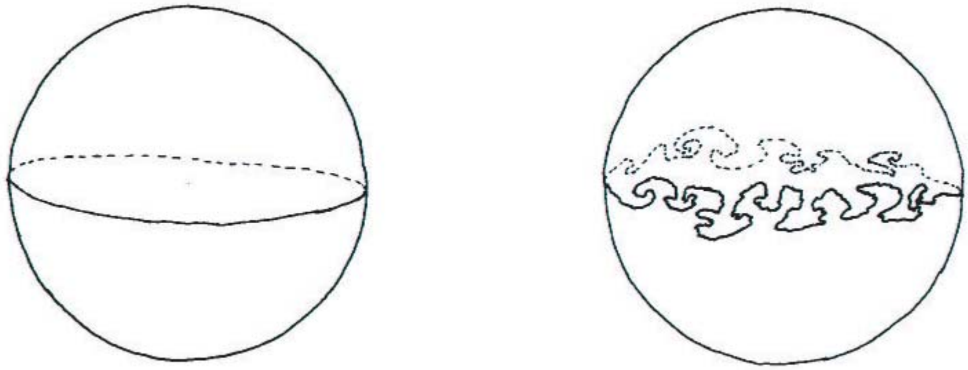
M : hyperbolic 3-manifold with finite volume
$\exists \Gamma < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$: 離散部分群s.t. $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$
$\mathbb{H}^3 \to M$: universal covering

$S \subset M$: incompressible surface, $\neq S^2$
$\tilde{S} \subset \mathbb{H}^3$: Sのpreimageのあるcomponent
$\tilde{S}$は単連結

特に、S : embedded
$\Rightarrow \tilde{S} \subset \mathbb{H}^3$: embedded plane

$\Lambda(\tilde{S})$: limit point setとするとき、

1. $\Lambda(\tilde{S}) = S^1$
2. $\Lambda(\tilde{S}) \neq S^1$ nor S^2
3. $\Lambda(\tilde{S}) = S^2$



totally geodesicとquasi-Fuchsian

定理（Bonahon-Thurston）

以上の３通りに分類されて、

1. quasi-Fuchsian
2. $\exists l \subset S$： loop（accidental parabolic）
   s.t. lはcuspまでfreely homotopic
3. geometrically infinite

定理（Thurston）

3のケース

$\Longleftrightarrow$ MがS^1上の曲面束で、Sはそのfiber

M : knot complement
S : closed $\Rightarrow$ $\tilde{S}$はgeometrically infiniteでない。

Sがquasi-Fuchsianかどうか
$\Longleftrightarrow$ accidental parabolicがあるか
$\Longleftrightarrow$ Sとcuspをつなぐannulusがあるか

Theorem（J. D. Masters and X. Zhang）

Every hyperbolic knot complement contains a closed quasi-Fuchsian surface.

Corollary

Suppose that M is a hyperbolic knot complement. Then M contains a closed essential surface which remains essential in all but finitely many Dehn fillings of M.

J. D. Masters and X. Zhang, *Closed quasi-Fuchsian surfaces in hyperbolic knot complements*, math.GT/0601445, 2006

$\Lambda(\tilde{S})$が$\mathbb{H}^3$の無限遠球面上の円

$\iff$ S : totally geodesic ($\subset$ quasi-Fuchsian)

Conjecture (Menasco-Reid)

A hyperbolic **knot** in the **3-sphere** does not have a **closed**, **totally geodesic** surface **embedded** in its complement.

W. Menasco and A. Reid, *Totally geodesic surfaces in hyperbolic link complements*, Topology '90, 1992.

Theorem (C. J. Leininger)

For any even integer $g \geq 2$, there exists a **two component** hyperbolic link in S^3 which contains an embedded totally geodesic surface of genus g in its complement.

C. J. Leininger, *Small curvature surfaces in hyperbolic 3-manifolds*, math.GT/0409455, 2004

Theorem (J. DeBlois)

There exist infinitely many hyperbolic knot complements in **rational homology spheres** containing closed embedded totally geodesic surfaces.

J. DeBlois, *Totally geodesic surfaces and homology*, math.GT/0601561, 2006

Conjecture was solved for

- alternating knots
- double torus knots
- 3-bridge knots
- 4-braid knots

(b) 結び目補空間内の本質的曲面

Theorem（Haken）

任意のnormal surface Fは、fundamental normal surfacesからなる有限集合$\{F_1, \dots, F_n\}$の非負整数係数の線形和$F = a_1 F_1 + \cdots + a_n F_n$として表される。

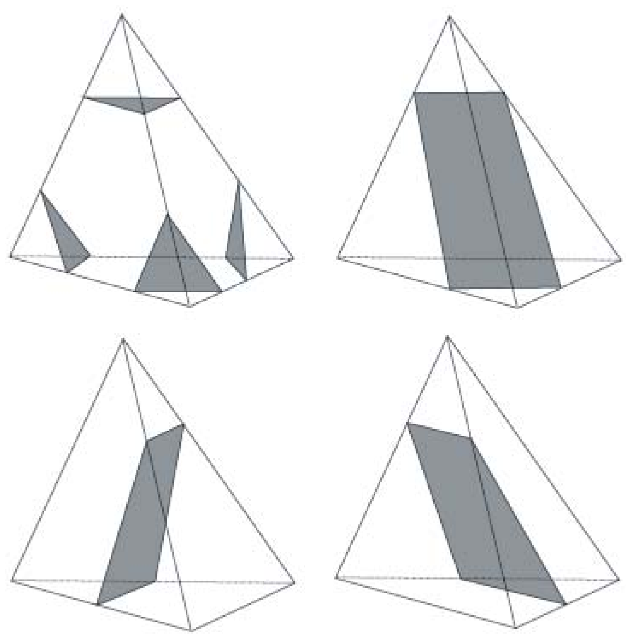


FIGURE 1. Normal triangles and quadrilaterals

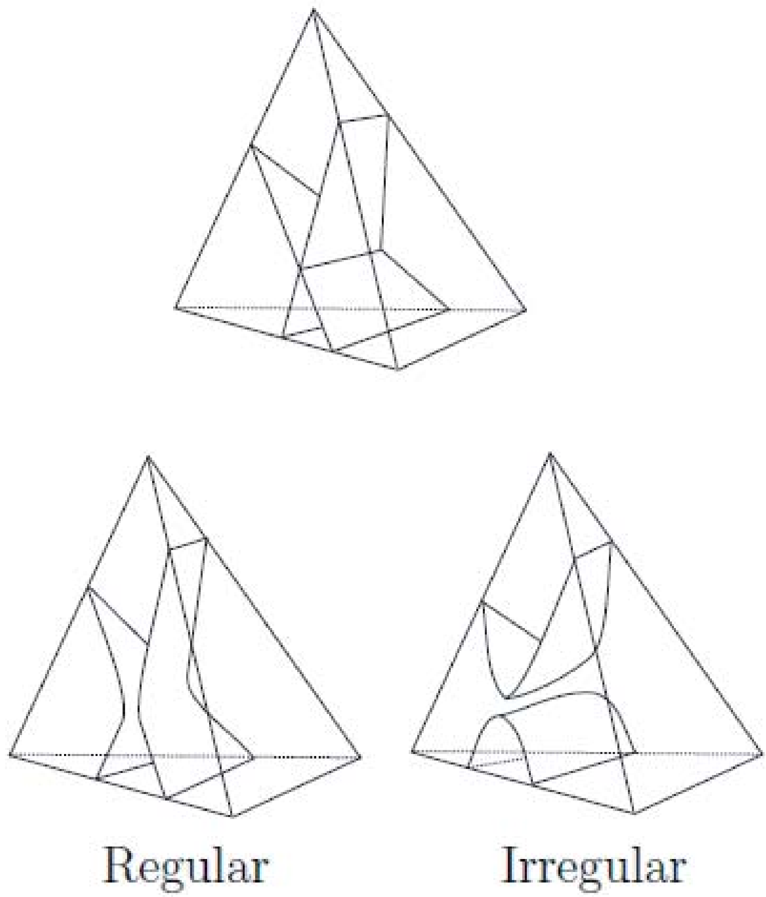


FIGURE 2. The Haken sum $F + G$

W. Haken, *Teorie der Normalflaschen*, Acta. Math. **105** (1961) 245-375.

Theorem（R. T. Wilson）

有限個の incompressible Seifert surfaces $\{S_1, \ldots, S_n\}$ と有限個の closed incompressible surfaces $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$ が存在して、任意の incompressible Seifert surface S は Haken sum
$S = S_i + a_1 Q_1 + \cdots + a_m Q_m$ $(a_1, \ldots, a_m \geq 0)$
として表される。

Corollary（R. T. Wilson）

Every knot with an infinite number of distinct incompressible Seifert surfaces contains a closed incompressible surface in its complement.

R. T. Wilson, *Knots with infinitely many incompressible Seifert surfaces*, math.GT/0604001, 2006

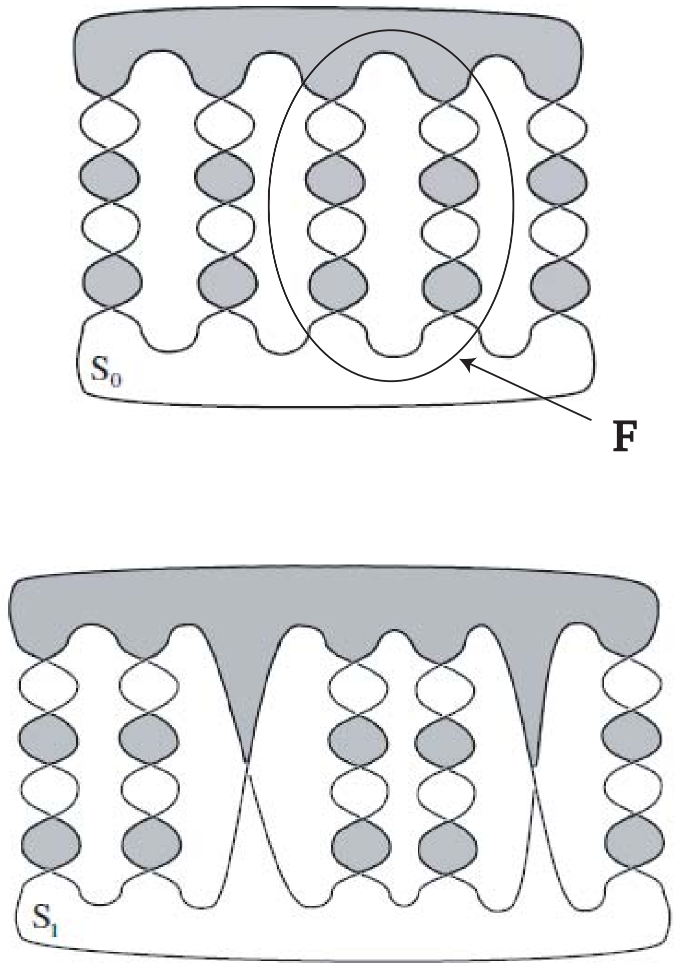
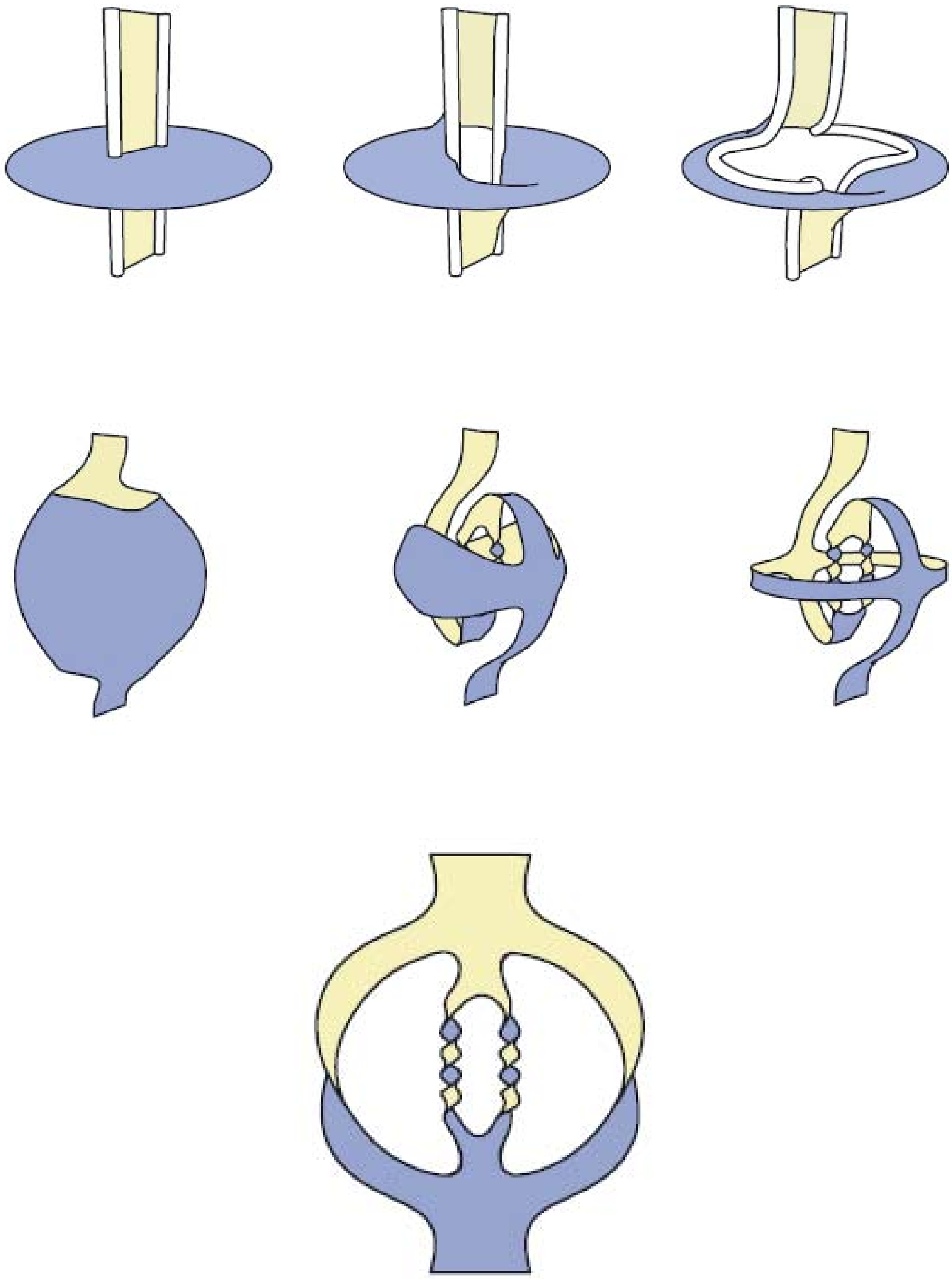


FIGURE 6. The Seifert surfaces S_0 and S_1

$S_1 = S_0 + F$となっている。

一般に、$S_n = S_0 + nF$として、無限個のincompressible Seifert surfaceを作れる。



定義

$p/q \in \mathbb{Q} \cup \infty$ が K の **boundary slope**
$\iff$ $\exists F \subset E(K)$: essential surface,
s.t. ∂F が $\partial E(K)$ で slope p/q を持つ

$\mathcal{B}K$: the set of all boundary slopes of K

Theorem（A. Hatcher）

$\mathcal{B}K$ は有限集合

A. Hatcher, *On the boundary curves of incompressible surfaces*, Pacific J. Math. **99** (1982) 373-377.

A. Hatcher, *Boundary curves of incompressible surfaces*, TeX version, 2004.

次の定理は1930年に証明されたが、後になってSeifertがアルゴリズムを与えた。

Theorem（L. Pontrjagin and F. Frankl）

任意のknotに対して、Seifert surfaceが存在する。

任意のknot K に対して、$0 \in \mathcal{B}K$ であることが導ける。

Theorem（M. Culler and P. B. Shalen）

任意のnon-trivial knot exterior $E(K)$ 内に、境界を持つ分離的なessential surfaceが存在する。

任意のnon-trivial knot K に対して、$\mathcal{B}K - \{0\} \neq \emptyset$ であることが導ける。

M. Culler and P. B. Shalen, *Bounded, separating incompressible surface in knot manifolds*, Invent. Math. **84** (1984), 537-545.

$\infty \notin \mathcal{B}K$ のとき、$\mathcal{B}K$ の**直径**を以下で定義する。

$diam\mathcal{B}K =$ (maximal slope) – (minimal slope)

上の定理は更に拡張されている。

定理（M. Culler and P. B. Shalen）

$\infty \notin \mathcal{B}K$ とする。このとき、任意の non-trivial knot K に対して、$diam\mathcal{B}K \geq 2$ である。

M. Culler and P. B. Shalen, *Boundary slopes of knots*, Comm. Math. Helv. **74** (1999) 530-547

Theorem (Hatcher-Thurston)

2-bridge knot complement内のincompressible surfaceの分類

A. Hatcher and W. Thurston, *Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements*, Invent. Math. **79** (1985), 225-246.

Corollary (Hatcher-Thurston)

K : 2-bridge knot

$\forall \gamma \in \mathcal{B}K$ はinteger

Theorem (Hatcher-Oertel)

$\forall p/q \in \mathbb{Q} \cup \infty$,

$\exists K$: Montesinos knot

s.t. $p/q \in \mathcal{B}K$

A. Hatcher and U. Oertel, *Boundary slopes for Montesinos knots*, Topology 28 (1989), 453.480.

Conjecture (Shimokawa)

K : alternating knot

$\forall \gamma \in \mathcal{B}K$ はinteger

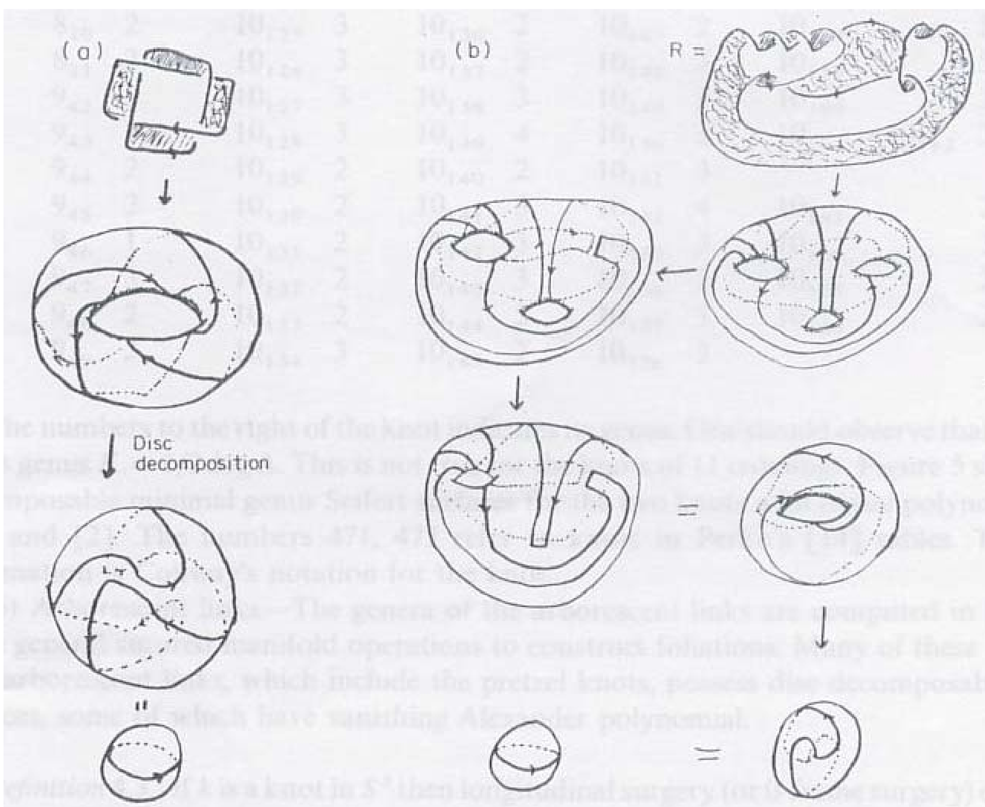
(c) Seifert曲面とその応用

定義

種数が最小のSeifert surfaceを**minimal genus Seifert surface**と言う。

定理（D. Gabai）

disk decomposable ⇒ minimal genus



定義

Seifertのアルゴリズムで得られるSeifert surfaceを**canonical Seifert surface**と言う。

定理

alternating diagram から得られる canonical Seifert surface はminimalである。

R. Crowell, *Genus of alternating link types*, Ann. of Math. **69** (1959) 258-275.

K. Murasugi, *On the genus of the alternating knot I, II*, J. Math. Soc. Japan **10** (1958) 94-105, 235-248.

D. Gabai, *Foliations and genera of links*, Topology **23** (1984) 381-394.

定義

Seifert surfaceの族$\{F_t\}$ ($t \in S^1$)で、

1. $S^3 = \bigcup_{t \in S^1} F_t$
2. $F_t \cap F_s = K$ for any $t \neq s \in S^1$

を満たすものが存在するとき、F_tを**fiber surface**、Kを**fibered knot**という。

定理（J. Stallings）

fibration $S^3 - K = F \times I/h$はuniqueである。

J. Stallings, *On fibering certain 3-manifolds*, Top. 3-manifolds Proc. (1961) 95-100.

更に、fibered knotのincompressible Seifert surfaceはfiber surfaceであるから、fibered knotのincompressible Seifert surfaceは一意的である。

Theorem (Gabai)

Seifert曲面 F が F_1 と F_2 の Murasugi sum $F = F_1 * F_2$ で得られたとする。

- F_1 と F_2 が incompressible $\Rightarrow$ F も incompressible
- F_1 と F_2 が minimal $\Rightarrow$ F も minimal
- F_1 と F_2 が fibered $\Rightarrow$ F も fibered

D. Gabai, *The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Contemp. Math. Vol. 20 (1983) 131-143.

incompressibility に関しては、non-orientable spanning surfaceへ拡張されている。

Theorem (M. Ozawa)

F_1 と F_2 が π_1-essential $\Rightarrow$ F も π_1-essential

M. Ozawa, *Essential state surfaces for knots and links*, math.GT/0609166

定義

$S \subset S^3 - K$: closed surface
$i : S \to S^3 - K$: inclusion map
$i_* : H_1(S) \to H_1(S^3 - K)$: induced homomorphism
$\mathrm{Im}(i_*) = m\mathbb{Z}$ のとき、S の **order** を $o(S) = m$ で定める。

定理（M. Ozawa）

次は同値である。

1. incompressible non-free Seifert surface F が存在する。
2. closed incompressible surface $S \subset S^3 - K$ で、$o(S) = 0$ となるものが存在する。

M. Ozawa, *Synchronism of an incompressible non-free Seifert surface for a knot and an algebraically split closed surface in the knot complement*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000) 919-922.

定理（S. R. Fenley）

Any accidental Seifert surface is non-minimal.

定理（M. Ozawa and Y. Tsutsumi）

Any accidental Seifert surface is totally knotted.

逆は成立しない。（例えば、minimal genus, totally knotted Seifert surfaceが存在する。 by M.Hirasawa）

定理（M. Ozawa and Y. Tsutsumi）

For any positive integer n, there exists a genus one knot such that it bounds a non-accidental, totally knotted Seifert surface of genus n.

S. R. Fenley, *Quasi-Fuchsian Seifert surfaces*, Math. Z. **228** (1998), 221-227.

M. Ozawa and Y. Tsutsumi, *Totally knotted Seifert surfaces with accidental peripherals*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003) 3945-3954.

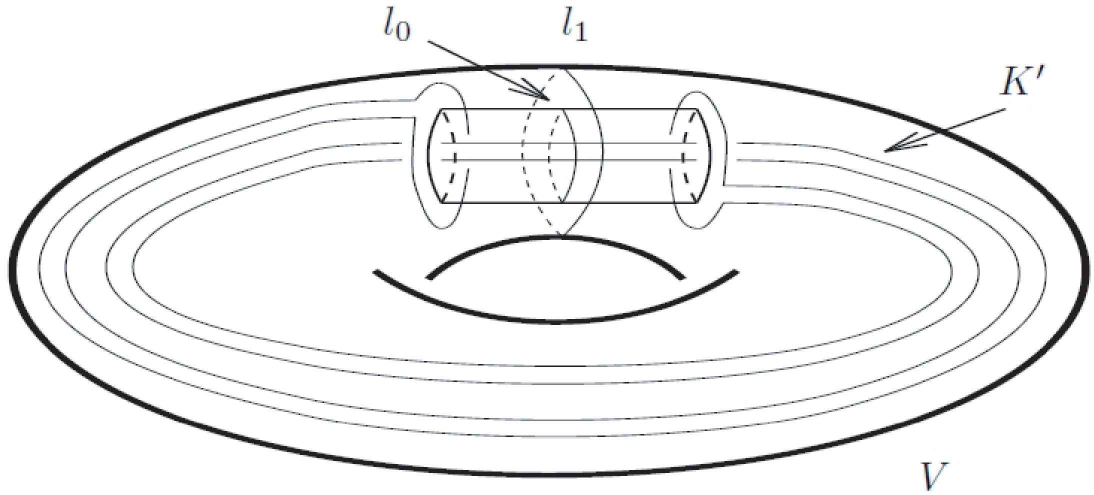
例. accidental Seifert surfaceの作り方

solid torus V の中に、knot K' とSeifert surface S_0 を用意する。

S_0 と ∂V を繋ぐ annulus を A とする。

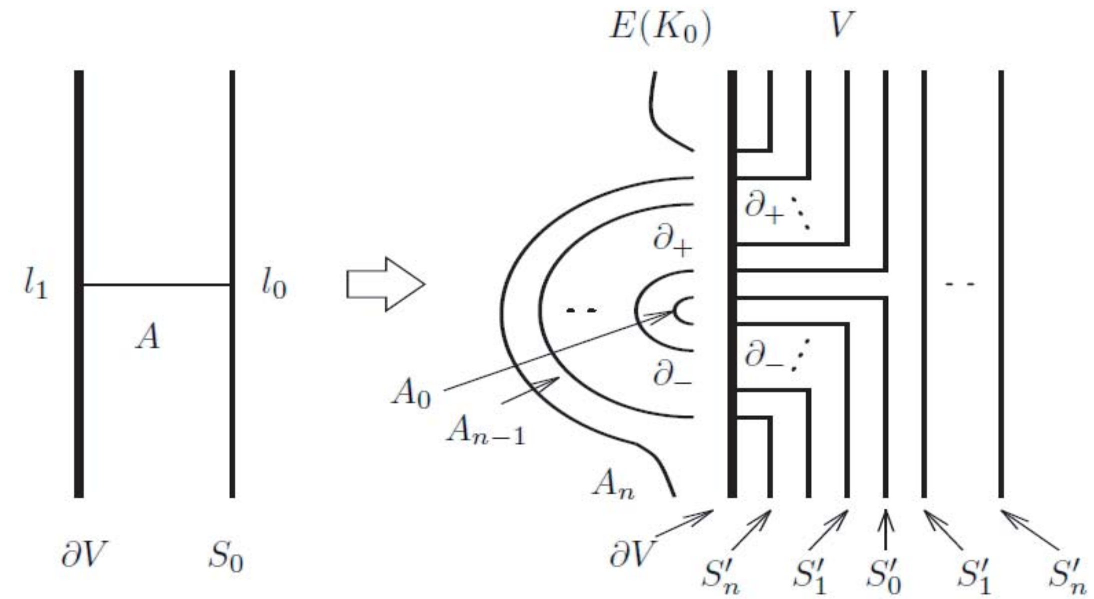
$\partial N(S_0)$ のコピーを n 枚用意する。

annulus A に沿って、S_i をsmoothingしたものを S'_i とする。



次に、K_0をcomposite knotとし、$A_0, A_1, \ldots, A_n$をK_0のdecomposing sphereから得られる$E(K_0)$内のessential annuliとする。

最後に、Vと$E(K_0)$を以下のようにS_i'とA_iを**一つずつずらして**貼り合わせる。



得られたSeifert surfaceは、$S_1 = \partial N(S_0)$として作成したことから、accidental annulusを持つので、accidentalである。

crossing changeとSeifert surface

定義

K : non-split link
F : Seifert surface
Fが**taut** $\iff$

- Fがincompressible
- F に homologous な surface の内で、F が maximal Euler characteristicを持つ

D : crossing disk s.t. $S^3 - D - K$はirreducible
$L = \partial D$
$M = S^3 - N(K) \cup N(L)$
$T_0 = \partial N(L)$

F : taut Seifert surface for K, $F \cap L = \emptyset$

K_+ : L上$+1$ surgeryして得られるlink
このとき、Fから得られるSはK_+のSeifert surfaceになる。

Theorem（D. Gabai）

L 上Dehn surgeryして K から得られる全てのlinkの中で、高々一つに対して、

- splitting sphereが存在するか、または
- S より大きい Euler characteristic の Seifert surfaceが存在する。

よって、

Theorem（M. Scharlemann）

K と K_+ の少なくとも一つは、non-split linkで、F (resp. S) は taut Seifert surfaceである。

D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds II*, J. Diff. Geom. **26** (1987) 557-614.

M. Scharlemann, *Crossing changes*, Chaos, Solitons, and Fractals, **9** (1998) 693-704.

Corollary（Scharlemann - Thompson）

unknotをcrossing changeしてunknotが得られたとする。このとき、crossingはnugatoryである。

Proof.

K : unknot
D : crossing disk for K
F : taut Seifert surface for K, $F \cap L = \emptyset$
$F \cap D = \alpha$: single arcとなるようにとっておく。

もしFがdiskならば、Dとの交わりがarc αであるから、crossing はnugatoryである。

Fがdiskでないならば、FはKのtaut Seifert surfaceでない。上の Theorem より、FはK_+のtaut Seifert surfaceとなる。従って、K_+はunknotである。

pretzel knot $(3, \pm 1, -3)$の例などがあるので、次のProblemではoriented knotを考える。

Problem 1.58（X.-S. Lin）

Kからcrossing changeをしてK'が得られたとする。もし$K \cong K'$ならば、そのcrossingはnugatoryである。

Theorem（I. Torisu）

2-bridge knotについては正しい。

Theorem（E. Kalfagianni）

fibered knotについては正しい。

I. Torisu, *On nugatory crossings for knots*, Topology Appl. **92** (1999) 119-129.

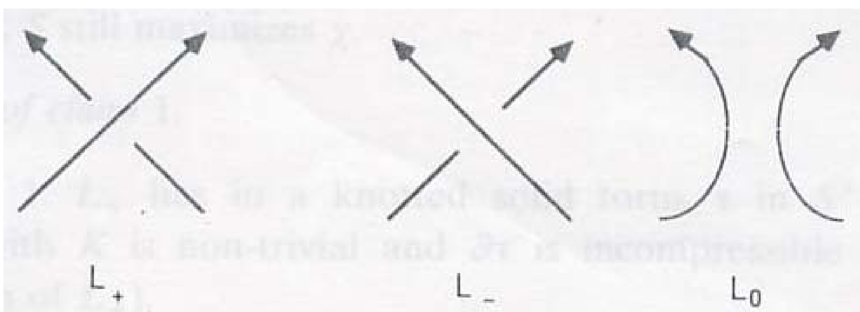
E. Kalfagianni, *Crossing changes of fibered knots*, math.GT/0610440.

Conway triple

$\nabla_+(z) - \nabla_-(z) = z\nabla_0(z)$より、
$deg\nabla_+(z)$，$deg\nabla_-(z)$，$degz\nabla_0(z)$を大きい順に並べたとき、

$$d_1 = d_2 \geq d_3$$

となる。



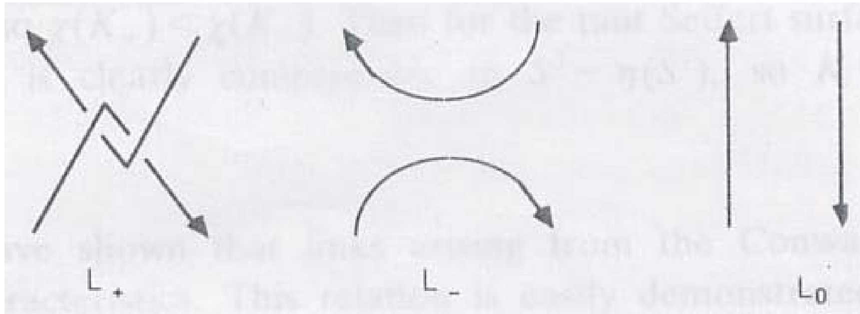
定理 (M. Scharlemann and A. Thompson)

$\chi(L_+)$，$\chi(L_-)$，$\chi(L_0) - 1$を小さい順に並べたとき、

$$\chi_1 = \chi_2 \leq \chi_3$$

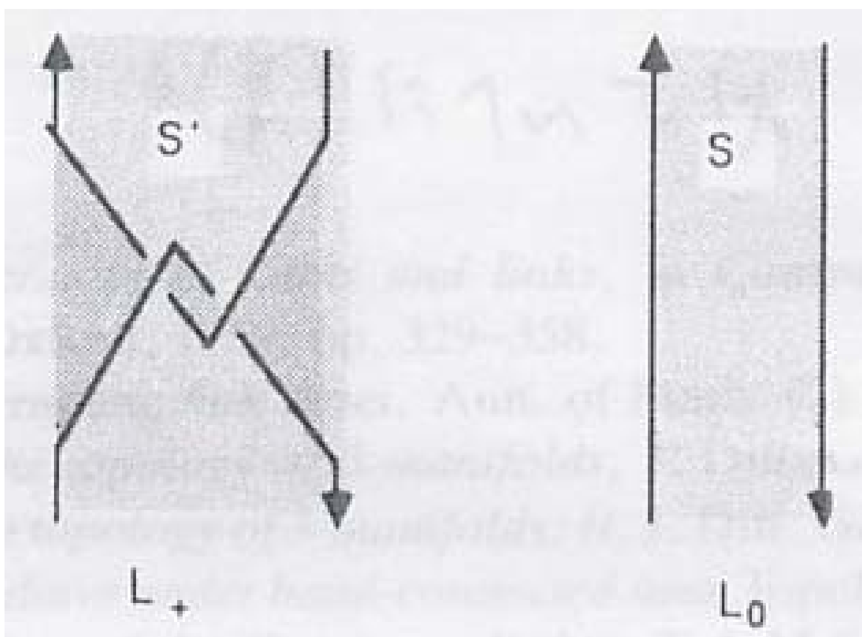
となる。

M. Scharlemann and A. Thompson, *Link genus and the Conway moves*, Comment. Math. Helvetici **64** (1989) 527-535.



定理 (M. Scharlemann and A. Thompson)

$\chi(L_+) = \chi(L_0) - 1 < \chi(L_-)$のとき、$L_+$と$L_0$の taut Seifert surfaces S'とSで、S'はSにHopf bandをplumbingして得られるものが存在する。



(d) 閉曲面

$S \subset S^3 - K$: closed incompressible surface

$\boxed{\text{種数0} \iff K\text{はsplit link}}$

$\boxed{\text{種数1} \iff K\text{はsatellite or composite link}}$

Theorem (H. Schubert)

K : bridge position

S : incompressible tori

$\Rightarrow$ Kのbridge numberを変えずに、Sをbridge positionにisotopeできる。

H. Schubert, *Über eine numerische Knoteninvariante*, Math. Z. **61** (1954) 245-288.

Schultensにより、証明の簡略化がされている。

J. Schultens, *Additivity of bridge numbers of knots*, Math. Proc. of the Camb. Phil. Soc. 135 (2003) 539-544.

Theorem (A. Hatcher and W. Thurston)

2-bridge knot complement内にはclosed incompressible surfaceは存在しない。

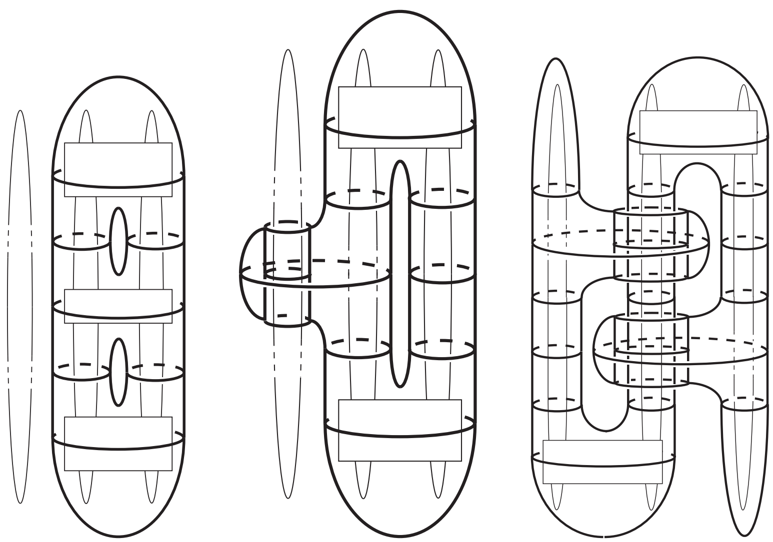
A. Hatcher and W. Thurston, *Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements*, Invent. Math. **79** (1985), 225-246.

Theorem (M. Ozawa)

K : 3-bridge link

S : genus two closed incompressible surface

$\Rightarrow$



I-a　　I-b　　I-c

M. Ozawa, *Closed incompressible surfaces of genus two in 3-bridge knot complements* , in preparation.

Theorem (M. Ozawa)

Let K be a double torus knot in S^3. Then K is a satellite knot if and only if it is either

(i) a cable knot of a tunnel number one knot,

(ii) $K(\alpha, \beta; p, q)$ or

(iii) $K(H_0, K; p, q)$

M. Ozawa, *Satellite double torus knots*, J. Knot Theory and its Ramifications **10** (2001), no. 1, 133–142.

$E(K)$内にessential closed surfaceが存在しないとき、即ち、$E(K)$内のclosed incompressible surfaceが$\partial N(K)$にisotopicのとき、Kは**small**であるという。

今まで知られているSmall knot

- torus knot
- 2-bridge knot
- Montesinos knot with length 3
- twisted torus knot with 2-string twisted

Problem

small knotを特徴付けよ。

Remark. Twisted torus knot $T(5,2;4,1)$は、Cable knot $C(T(3,2);2,13)$であるので、smallではない。

Accidental surface

$S \subset S^3 - K$: accidental closed surface

— Theorem (K. Ichihara and M. Ozawa) —

accidental annulusの取り方に依らず、boundary slopeは一意的である。
更に、non-meridional slopeの場合、accidental annulusは一意的である。

従って、accidental closed surface Sに対して、Sの**accidental slope**を定義できる。

[CGLS]のLemma 2.5.3により、accidental slopeはmeridionalかintegralである。

K. Ichihara and M. Ozawa, *Accidental surfaces in knot complements*, J. Knot Theory and its Ramifications **9** (2000), 725-733.

M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke, and P. B. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. **125** (1987) 237-300.

$F \subset E(K)$: essential surface with boundary

定義

Fが **strongly essential**
$\Longleftrightarrow$ $E(K)$をFで切り開いて得られる多様体の少なくとも一つの成分が∂-irreducible

Theorem (K. Ichihara and M. Ozawa)

次は同値である。

- accidental slope γの accidental closed surfaceが存在する。
- boundary slope γのstrongly essential surfaceが存在する。

更に、これらのsurfaceはdisjointに取れる。

Corollary (H. Matsuda)

strongly essential surfaceのboundary slopeはmeridionalかintegral

Theorem (M. Ozawa and Y. Tsutsumi)

accidental essential surface with boundary slope γ
$\Rightarrow$ accidental closed incompressible surface with accidental slope γ

Corollary (M. Ozawa and Y. Tsutsumi)

accidental essential surfaceのboundary slopeはmeridionalかintegral

M. Ozawa and Y. Tsutsumi, *Totally knotted Seifert surfaces with accidental peripherals*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003) 3945-3954.

Alternating knot and positive knot

Theorem (W. Menasco)

K : alternating knot
$S \subset S^3 - K$: closed incompressible surface
$\Rightarrow \exists D$: meridional compressing disk for S

W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology **23** (1984) 37-44.

Theorem (M. Ozawa)

K : positive knot
$S \subset S^3 - K$: closed incompressible surface
$\Rightarrow o(S) \neq 0$

M. Ozawa, *Closed incompressible surfaces in the complements of positive knots*, Comment. Math. Helv. **77** (2002) 235-243.

Coiling Conjecture (Neuwirth Conjecture)

$\forall K \subset S^3$: knot

$\exists S \supset K$: closed surface

s.t.

- K is non-separating in S
- $S \cap E(K)$ is essential

Remark.

π_1-essential non-orientable spanning surface F を張らないknot（例えば、$(3,4)$-torus knot）が存在するので、$S = \partial N(F)$ としても予想は解決できない。

L. Neuwirth, *Interpolating manifolds for knots in* S^3, Topology Vol.2 (1964) 259-365.

M. Ozawa, *Interpolating manifolds for knots*, preprint, 2000.
http://www.komazawa-u.ac.jp/~w3c/
lecture/topology/pdf/inter.pdf

(e) タングル分解

Theorem (Culler-Gordon-Luecke-Shalen)

$r \in \mathcal{B}K \Rightarrow$ either

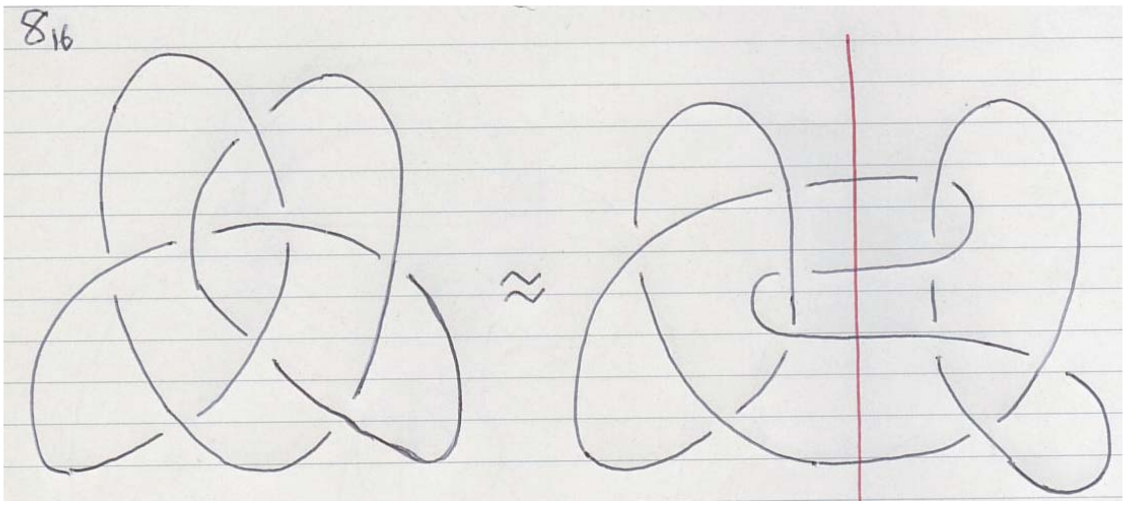
1. $K(r)$ is a Haken manifold, or
2. $K(r)$ is a connected sum of two lens spaces, or
3. $E(K)$ contains a closed incompressible surface which remains incompressible in $K(s)$ whenever $\Delta(r,s) > 1$, or
4. $E(K)$ fibers over S^1 with fiber a planar surface having boundary slope r.

Corollary (Culler-Gordon-Luecke-Shalen)

$\infty \in \mathcal{B}K \Rightarrow K$ is not small, i.e. $E(K)$ contains an essential closed surface.

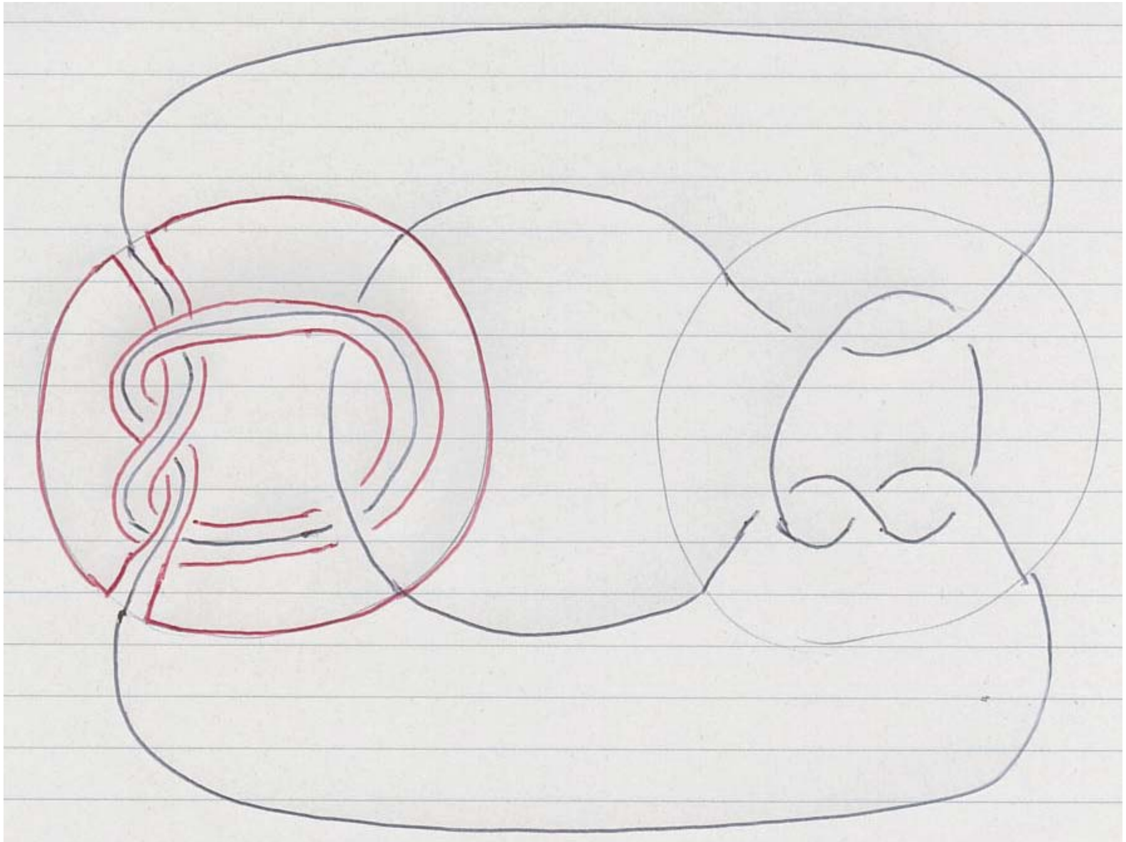
M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke, and P. B. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. **125** (1987) 237-300.

Example. Tangle decomposing sphereからEssential closed surfaceを作り出す



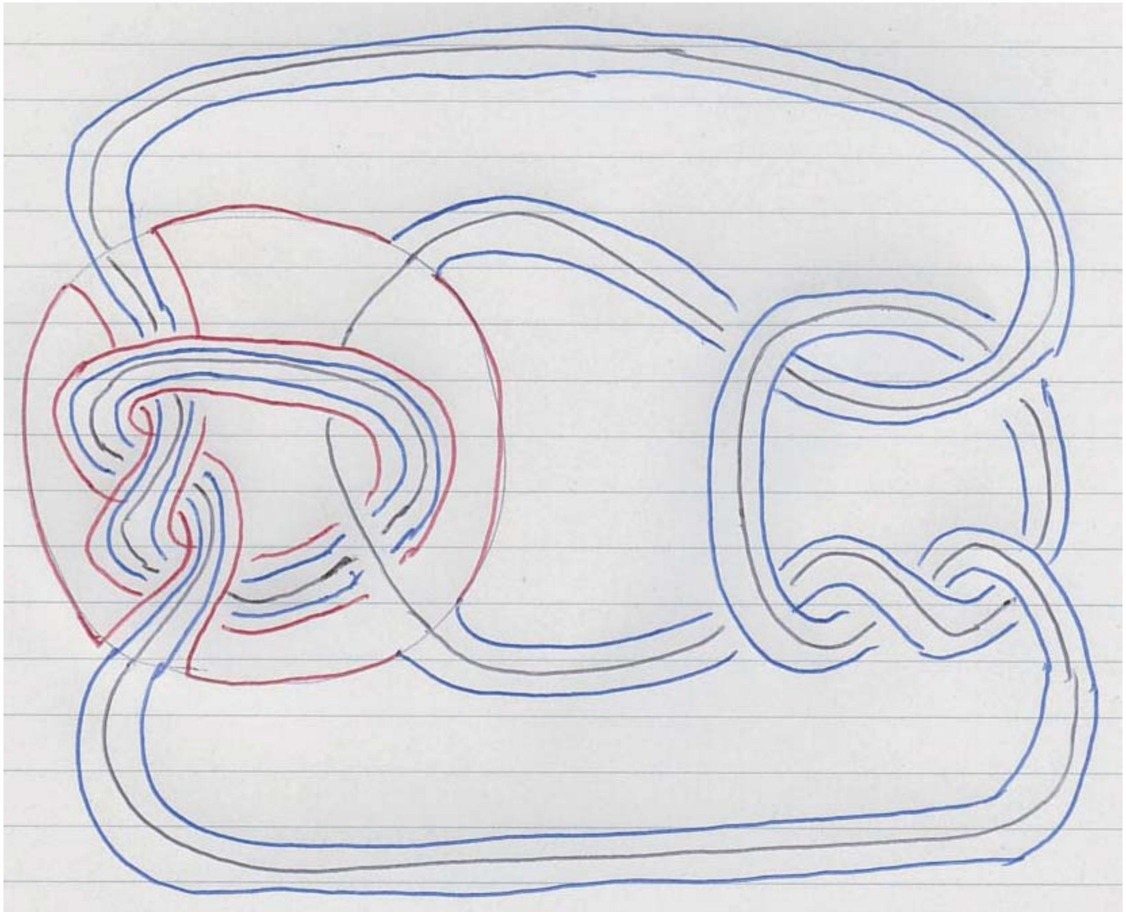
8_{16}は二つのtrefoilが絡み合っているように見える。二つのtrefoilを引き離すと、tangle分解球面が現れる。

この二つのtangleはfree（即ち、stringsの補空間の基本群がfree group）なので、tangle分解球面と交わらないようなessential closed surfaceは無いことに注意する。



まず、一方のtangle内でtubingをする。ここで、unknotted string に沿った tubing を行うと、compressibleになってしまうので、knotted stringに沿ったtubingを行う。

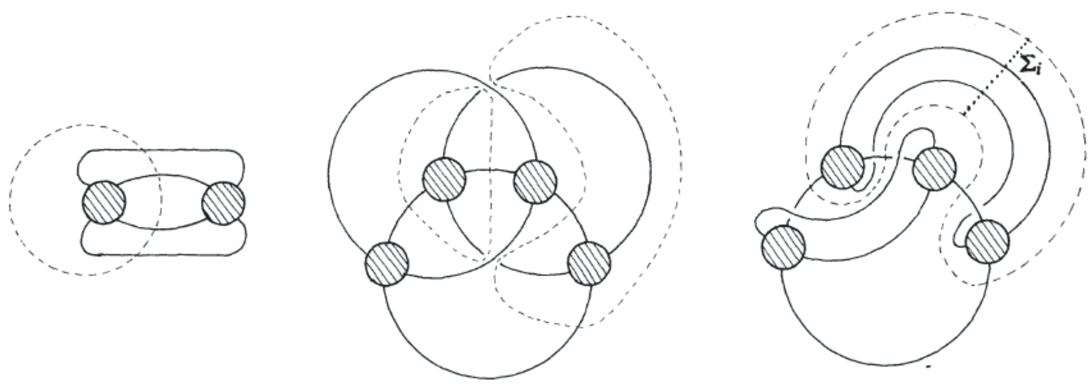
この操作は、peripheral torusとtangle decomposing sphereとのHaken sumとしても見なせる。但し、boundary parallelなannulusは捨て去る。



sphereをtubingしてtorusが得られたので、knotとの交点を無くす為、更にtubingを行う。ここで、既にtubingを行った左側のtangle内でtubingを行うとcompressibleになってしまうので、右側のtangleへ向けてtubingをする。

Theorem (W. Menasco)

alternating linkのConway sphereは、
(i) visibleか、または
(ii) hidden
更に、(ii)の場合は、isotopyでvisible（iii）にできる。



(i) (ii) (iii)

W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology **23** (1984) 37-44.

M. B. Thistlethwaite, *On the algebraic part of an alternating link*, Pacific J. Math. **151** (1991) 317-333

Theorem (M. Ozawa)

Let L be a knot or link in S^3 which is contained in a genus two Heegaard surface F of S^3. Suppose there exists a 2-sphere S in S^3 which gives an essential 2-string tangle decomposition of the pair (S^3, L) and intersects all components of L. Then there is an isotopy $rel.L$ of S which makes S intersect F in a single simple closed curve.

Corollary (M. Ozawa)

Hyperbolic double torus knots are 2-string prime.

M. Ozawa, *Tangle decompositions of double torus knots and links*, J. Knot Theory Ramifications 8 (1999), no. 7, 931–939.

torus knot, 2-bridge knot, Montesinos knot with length three はsmallであるから、任意のnに関してn-string primeである。

Theorem (Gordon and Reid)

Tunnel number one knots are n-string prime for all n.

C. McA. Gordon and A. W. Reid, *Tangle decompositions of tunnel number one knots and links*, J. Knot Theory and its Ramification **4** (1995) 389-409.

Theorem (M. Ozawa)

Free genus one knots are n-string prime for all n.

(with Hiroshi Matsuda) *Free genus one knots do not admit essential tangle decompositions*, J. Knot Theory Ramifications 7 (1998), no. 7, 945–953.

Theorem (A. Thompson)

Let K be a knot in thin position. Then

- K is also in a bridge position or
- K admits an essential tangle decomposition.

A. Thompson, *Thin position and bridge number for knots in the 3-sphere*, Topology **36** (1997) 505-507.

Corollary

Thin position for a tunnel number one knot or free genus one knot is a bridge position.

Theorem (Y.-Q. Wu)

Thinnest level sphere is essential.

Y.-Q. Wu, *Thin position and essential planar surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 3417-3421.

Definition

A two-sided surface F in a 3-manifold is **strongly compressible** if there exist two compressing disks in both sides of F which are disjoint, and **weakly incompressible** if it is not strongy compressible.

Theorem (M. Tomova)

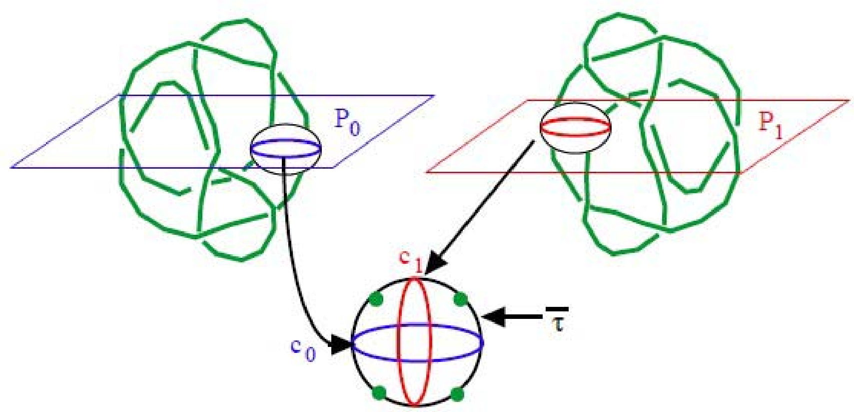
Second thinnest level sphere is weakly incompressible.

M. Tomova, *Compressing thin spheres in the complement of a link*, math.GT/0404282, 2004.

Theorem (Scharlemann and Tomova)

Suppose a link K in a 3-manifold M is in bridge position with respect to **two different bridge surfaces** P and Q, both of which are c-weakly incompressible. Then either

- P and Q can be isotoped so that $P \cap Q$ consists of **essential loops on both surfaces**, or
- K is a **Conway product** so that it naturally decomposes both P and Q into bridge surfaces for the respective factor link(s).



M. Scharlemann, M. Tomova, *Conway products and links with multiple bridge surfaces*, math.GT/0608435, 2006.

Theorem (C. McA. Gordon and J. Luecke)

$u(K) = 1$とする。いくつかの例外を除いて、Kを解く為のcrossing changeは、essential torus及びessential Conway sphereと交わらない場所でできる。

C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots with Unknotting Number 1 and Essential Conway Spheres*, math.GT/0601265, 2006.

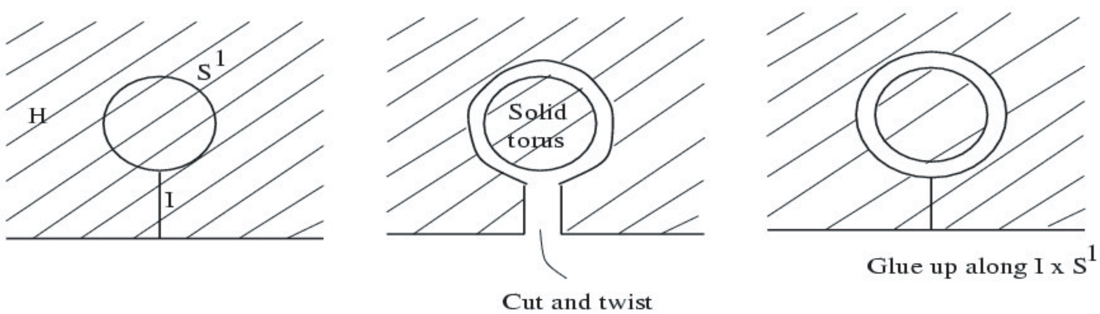
Theorem (Jaco, Rubinstein and Sedgwick)
Given a link-manifold there is an algorithm to decide if it contains a properly embedded, essential, planar surface; if it does, the algorithm will construct one.

W. Jaco, J. H. Rubinstein and E. Sedgwick, *Finding planar surfaces in knot- and link-manifolds*, math.GT/0608700, 2006.

(f) Dehn手術

Theorem (Wallace, Lickorish)

Every closed, orientable, connected 3-manifold may be obtained by surgery on a link in S^3.
Moreover, one may always find such a surgery presentation in which the surgery coefficients are all ± 1 and the individual components of the link are unknotted.



A. D. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Can. J. Math. **12** (1960) 503-528.

W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. **76** (1962) 531-538.

Essential $S^2 \subset K(r)$

Cabling Conjecture

Dehn surgery on a nontrivial knot K in S^3 yields a reducible manifold only when K is a nontrivial cabled knot. Furthermore, only pq-Dehn surgery on a nontrivial (p, q)-cabled knot yields a reducible manifold.

The Conjecture is True for ...

- Composite knots - Gordon
- 2-Bridge knots - Hatcher, Thurston
- Satellite knots - Scharlemann
- Strongly invertible knots - Eudave-Munoz
- Alternating knots - Menasco, Thistlethwaite
- Arborescent knots - Wu
- Symmetric knots - Luft, Zhang, Hayashi, Shimokawa, Motegi, Gordon, Luecke
- 3,4,5-Bridge knots - Hoffman

Essential $T^2 \subset K(r)$

Theorem (Gordon and Luecke)

The hyperbolic knots with non-integral toroidal Dehn surgeries are precisely the Eudave-Muñoz knots $k(l, m, n, p)$

M. Eudave-Muñoz, *Non-hyperbolic manifolds obtained by Dehn surgery on hyperbolic knots*, in Geometric Topology, W.H. Kazez, ed., Studies in Advanced Mathematics Vol. 2.1, American Mathematical Society and International Press, 1997, pp. 35-61.

C. McA. Gordon and J. Luecke, *Non-integral toroidal Dehn surgeries*, Comm. Anal. Geom. **12** (2004) 417-485.

Heegaard $S^2 \subset K(r)$

Theorem (Gordon-Luecke)

For a non-trivial knot K and $r \neq \infty$,
$K(r) \neq S^3$.

C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 371-415.

Property P (Kronheimer-Mrowka)

For a non-trivial knot K and $r \neq \infty$,
$\pi_1(K(r)) \neq \pi_1(S^3)$.

P. Kronheimer and T. Mrowka, *Witten 's conjecture and property P*, Geom. Topol. **8** (2004) 295-310.

Heegaard $T^2 \subset K(r)$

Property R (Gabai)

For a non-trivial knot K and $r \neq \infty$,
$K(r) \neq S^2 \times S^1$.

D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds III*, J. Differential Geom. **26** (1987) 479-536.

Berge Conjecture

If a non-trivial Dehn surgery yields a lens space, then K is a doubly primitive knot and the surgery slope is the surface slope.

J. Berge, *Some knots with surgeries yielding lens spaces*, (1995) unpublished manuscript.

Generalized Berge Conjecture

If $1 \leq g(K(r)) < t(K) + 1$, then there exists a genus $t(K) + 1$ Heegaard splitting $(F; V, W)$ of S^3 such that $K \subset F$, K is primitive/primitive with respect to F, and r is the surface slope of K with respect to F. Moreover, $g(K(r)) = t(K)$.

M. Ozawa, *Interpolating manifolds for knots*, preprint, 2000.

http://www.komazawa-u.ac.jp/~w3c/

lecture/topology/pdf/inter.pdf

Theorem (Y. Rieck)

For all but finitely many manifolds M resulting from the filling of an incompressible boundary component of an acylindrical manifold X: $g(X) - 1 \leq g(M) \leq g(X)$

Y. Rieck, *Heegaard structures of manifolds in the Dehn filling space*, Topology **39** (2000) 619-641.

Theorem (Morgan-Tian)

An orientable closed 3-manifold with a finite cyclic fundamental group is a lens space.

J. W. Morgan and G. Tian, *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*, math.DG/0607607, 2006.

Theorem (Y. Ni)

If a knot in S^3 admits a lens space surgery, then the knot is fibred.

Y. Ni, *Knot Floer homology detects fibred knots*, math.GT/0607156, 2006.

Theorem (K-M-O-S)

Let U denote the unknot in S^3, and let K be any knot. If there is an orientation-preserving diffeomorphism $S^3_r(K) \cong S^3_r(U)$ for some rational number r, then $K = U$.

Peter Kronheimer, Tomasz Mrowka, Peter Ozsváth, Zoltan Szabó, *Monopoles and lens space surgeries*, math.GT/0310164, 2003.

3. Morse関数とHeegaard分解

Theorem (Morse)

M : m-manifold
$\forall g : M \to \mathbb{R}$: smooth function
$\exists\ f : M \to \mathbb{R}$ arbitrarily close to $g : M \to \mathbb{R}$
s.t. every critical point p_i of f is non-degenerate (i.e. $\det\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{p_i})\Big) \neq 0$).

Moreover, we can choose a local coordinate system $(X_1, \ldots, X_m)$ about p_i s.t.

$$f = -X_1^2 - \cdots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \cdots + X_m^2 + c_i,$$

where $c_i = f(p_i)$.

f is called a *Morse function* on M,
λ is called the *index* of p_i.

Put $M_t = \{p \in M | f(p) \le t\}$.

Theorem (Morse)

$M_{c_i+\epsilon}$ is diffeomorphic to the manifold obtained by attaching a λ-handle to $M_{c_i-\epsilon}$:

$$M_{c_i+\epsilon} \cong M_{c_i-\epsilon} \cup (D^\lambda \times D^{m-\lambda})$$

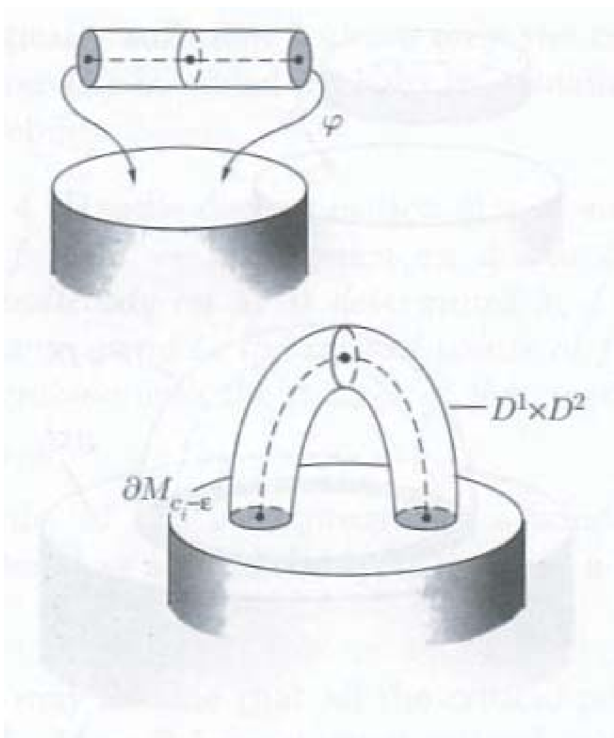


FIGURE 3.4. A 1-handle

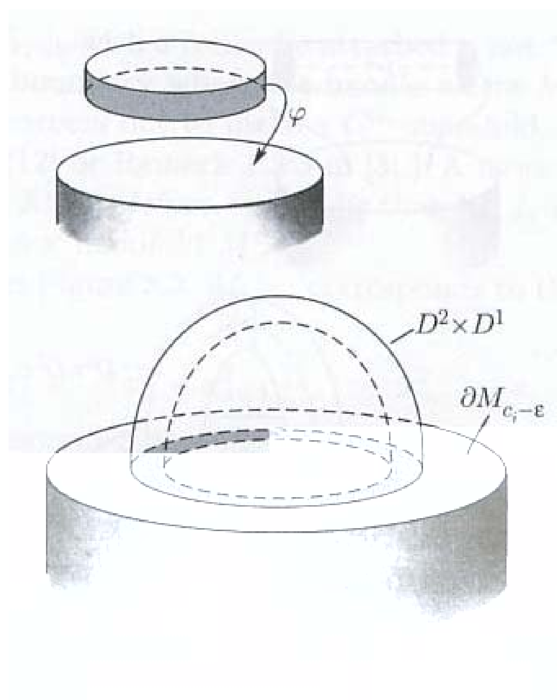


FIGURE 3.5. A 2-handle

Theorem (Heegaard)

$\forall M$: closed orientable 3-manifold
$\exists f : M \to \mathbb{R}$: Morse function
s.t. the corresponding handle decomposition has such an order :
$M = h^0 \cup (h^1_1 \cup \cdots \cup h^1_k) \cup (h^2_1 \cup \cdots \cup h^2_k) \cup h^3$.

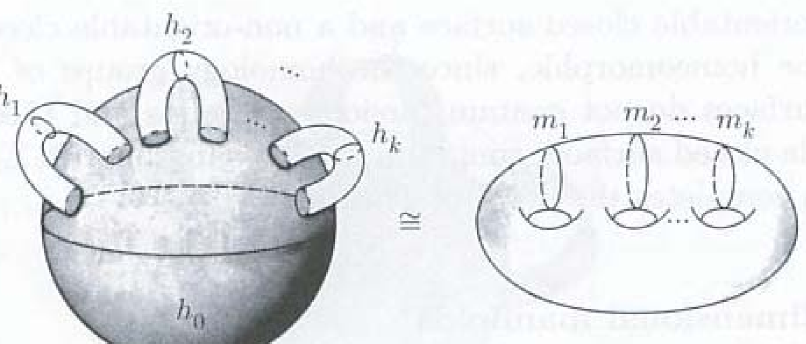
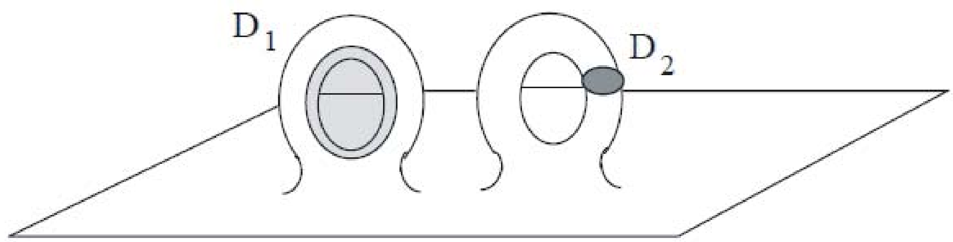


FIGURE 5.11. A handlebody of genus k and its meridians

Mの２つのhandlebody $H_1 = h^0 \cup (h^1_1 \cup \cdots \cup h^1_k)$と$H_2 = (h^2_1 \cup \cdots \cup h^2_k) \cup h^3$への分解を**Heegaard分解**といい、$S = H_1 \cap H_2$を**Heegaard曲面**という。

Definition (Casson and Gordon)

A Heegaard splitting $H_1 \cup_S H_2$ is **weakly reducible** if there are essential disks $D_i \subset H_i$ so that ∂D_1 and ∂D_2 are disjoint in S.



Remarks:

1．この概念は、ハンドル分解の言葉で言うと、D_2に対応する2-handleとD_1に対応する1-handleの順番を入れ換えることができるということである。

2. reducible $\Rightarrow$ weakly reducible

3. weakly reducibleでないHeegaard分解を**strongly irreducible**という。

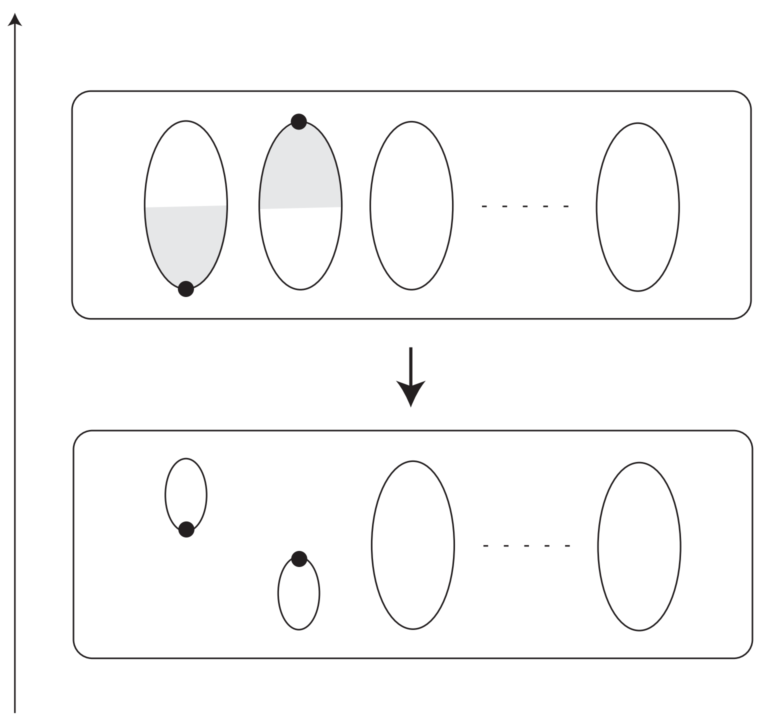
A. Casson and C. McA. Gordon, *Reducing Heegaard splittings*, Topology and its applications, **27** (1987) 275-283.

weakly reducible Heegaard 分解は、ハンドルの順序を交換することにより、より **thin** な状態にすることができる。

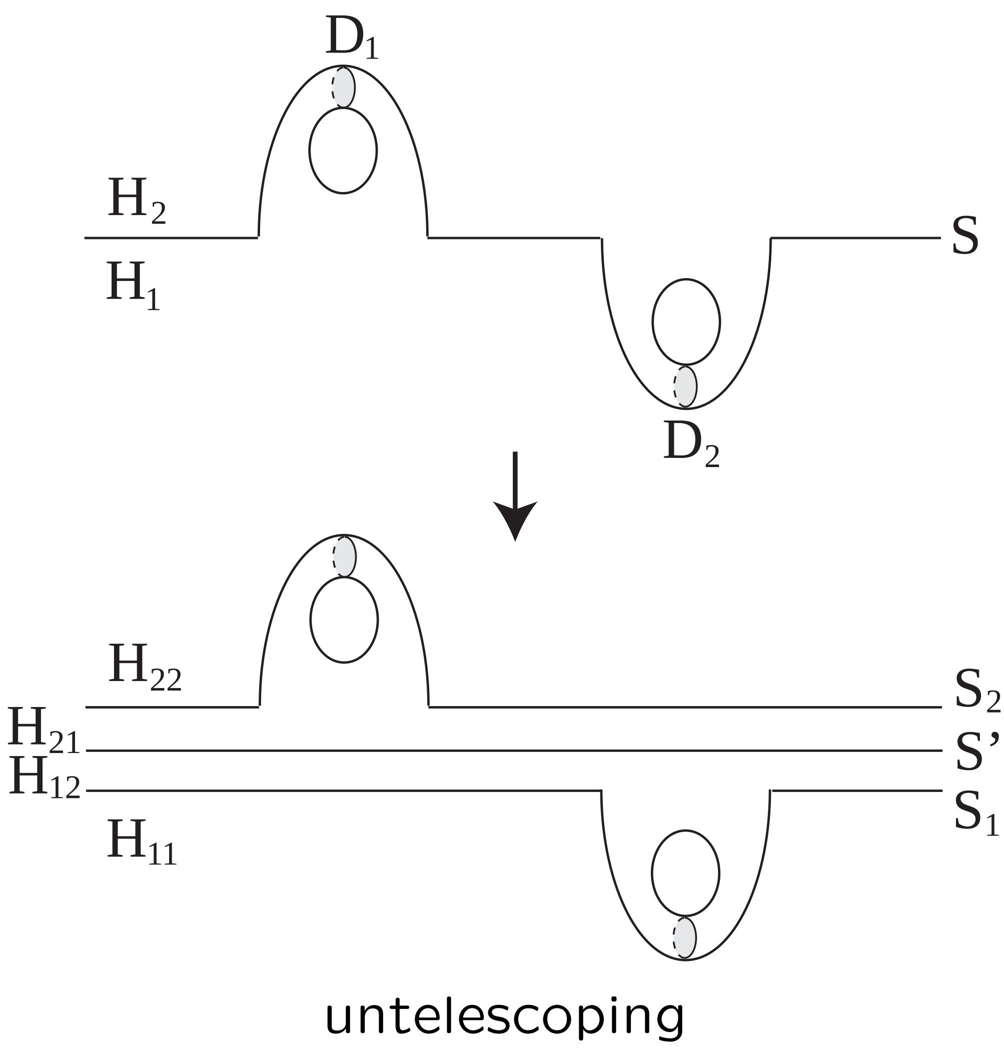
$$M = h^0 \cup (h^1_1 \cup \cdots \cup \mathbf{h^1_k}) \cup_S (\mathbf{h^2_1} \cup \cdots \cup h^2_k) \cup h^3$$

$\downarrow$

$$\begin{aligned} M &= \{h^0 \cup (h^1_1 \cup \cdots \cup h^1_{k-1}) \cup \mathbf{h^2_1}\} \\ &\qquad \cup_{S'} \{\mathbf{h^1_k} \cup (h^2_2 \cup \cdots \cup h^2_k) \cup h^3\} \\ &= M_1 \cup_{S'} M_2 \end{aligned}$$



S' : obtained by compressing along D_1 and D_2
S_i : obtained by compressing along D_i
$H_{11} \cong H_1 - N(D_1)$: handlebody
$H_{12} \cong (S' \times I) \cup N(D_2)$: compression body
$H_{22} \cong H_2 - N(D_2)$: handlebody
$H_{21} \cong (S' \times I) \cup N(D_1)$: compression body



untelescoping

このとき、$M_i = H_{1i} \cup_{S_i} H_{i2}$はHeegaard 分解であり、$M = M_1 \cup M_2$となっている。このような、handleの順序を入れ換える操作を**untelescoping**という。逆に、MはM_1とM_2から**amalgamation**により得られるという。

M の handle 分解の width を各 S_i の種数で定め、widthが最小のものをMのthin positionと呼ぶ。

Theorem (Scharlemann and Thompson)

$M = (H_{11} \cup_{S_1} H_{12}) \cup_{F_1} \cdots \cup_{F_m} (H_{n1} \cup_{S_n} H_{n2})$がthin positionのとき、

1. 各F_iはincompressible
2. 各Heegaard 分解$H_{j1} \cup_{S_j} H_{j2}$はstrongly irreducible

M. Scharlemann and A. Thompson, *Thin position for 3-manifolds*, Contemporary Math. **164** (1994) 231-238.

Casson-Gordon、Scharlemann-Thompson の結果の自然な拡張が以下の文献にある。

Tomova

If H is a c-strongly compressible bridge surface for a link K contained in a closed orientable irreducible 3-manifold M then one of the following is satisfied:

- H is stabilized
- H is meridionally stabilized
- H is perturbed
- a component of K is removable
- M contains an essential meridional surface.

Maggy Tomova, *Thin position for knots in a 3-manifold*, math.GT/0609674

Chuichiro Hayashi and Koya Shimokawa, *Thin position of a pair (3-manifold, 1-submanifold)*, Pacific J. Math., **197** (2001) 301-324.

Morse関数・Heegaard分解に関する手法

- Rubinstein-Scharlemann's graphic

  H. Rubinstein and M. Scharlemann, *Comparing Heegaard splittings of non-Haken 3- manifolds*, Topology 35 (1996) 1005-1026.

- Hempel's curve complex

  John Hempel, *3-Manifolds As Viewed From The Curve Complex*, math.GT/9712220

- Ozsváth-Szabó's Heegaard Floer homology

  Peter Ozsváth, Zoltán Szabó, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. (2), 159(3):1027-1158, 2004.

S^3内の結び目Kに関するMorse関数fは以下のように分類できる。

Classification of Morse function on (S^3, K)

1. S^3上のMorse関数を利用するもの
   - (a) $f : S^3 \to \mathbb{R}$
   - (b) $f : S^3 - A \to S^1$
2. $E(K)$上のMorse関数を利用するもの
   - (c) $f : E(K) \to \mathbb{R}$
   - (d) $f : E(K) \to S^1$

それぞれ、次に対応する。

(a) Thin position

(b) Braid presentation

(c) Unknotting tunnel (Heegaard splitting of knot exterior)

(d) Fibered knot (Circle valued Morse theory)

(a) Thin position

$f: S^3 \to \mathbb{R}$ s.t. $f|_K$がMorse関数

$c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ ： $f|_K$のcritical values
$c_i < r_i < c_{i+1}$: $f|_K$のregular value

$$w(f) = \sum_i |K \cap f^{-1}(r_i)|$$

をfのKに関する**width**という。

$$w(K) = \min\{w(f)\}$$

をK の **width**という。

$w(K)$ を与える K の位置を **thin position** という。

Lemma 4.4 (Gabai)

K が thin position にあるとする。
$P \subset E(K)$: surface with non-meridional boundary slope
$\Rightarrow \exists Q \subset E(K)$: level planar surface
s.t. arc component of $Q \cap P$ is essential in P
もし Pが∂-incompressible（resp. incompressible）ならば、$P \cap Q$ の各arc（resp. loop）成分は Qで essentialと出来る。

この補題の利点は、タングル分解を持たない結び目に対しても、non-meridionally boundaryを持つ曲面を本質的に level surfaceと交わるようにすることが出来ることにある。

D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds. III*, J. Differential Geometry **26** (1987) 479-536.

Proposition 1 (Gordon-Luecke)

$K \subset S^3$: non-trivial knot
$K(\pi)$ $(\pi \neq \gamma) \cong S^3$ (γ : meridional slope)
$\Rightarrow \exists P,\ Q \subset E(K)$: planar surfaces s.t.

(i) ∂P （resp. ∂Q）は π（resp. γ）のparallel copiesから成る。

(ii) P と Qは横断的に交わり、∂Pの各成分は ∂Qの各成分と $\Delta(\pi, \gamma)$個の点で交わる。

(iii) $P \cap Q$ のarc成分は、PでもQでも essentialである。

Gordon-Lueckeは、この命題での P、Qを用いてグラフを構成し、Qがthin positionにおけるlevel sphereだった場合、$K(\pi)$がlens spaceをconnected summandに持つことを示している。この帰結として、S^3内のnon-trivial knotのnon-trivial Dehn surgeryでは、S^3は得られないことを示し、補空間予想を解決している。

C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 371-415.

Thompsonは、タングル分解を持たない結び目に関しては thin positionと bridge positionが一致することを示している。

Theorem 1 (Thompson)

K が thin positionにあるとする。このとき、次のいずれかが成り立つ。

(1) $E(K)$ 内に meridional boundaryを持つ essential planar surfaceが存在する。（つまり、K はタングル分解を持つ。）

(2) K は f に関して bridge positionにある。

A. Thompson, *Thin position and bridge number for knots in the 3-sphere*, Topology **36** (1997) 505-507.

Wu、Bachman、Tomovaは、Thompsonの結果を更に精密化した。

Theorem (Wu)

If a link is in thin position but not bridge position then a thinnest level surface is essential.

Ying-Qing Wu, *Thin position and essential planar surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 3417-3421.

Theorem (Bachman)

If a knot or link has n thin levels when put in thin position then its exterior contains a collection of n disjoint, non-parallel, planar, meridional, essential surfaces.

David Bachman, *Non-parallel essential surfaces in knot complements*, math.GT/0302272, 2003.

Maggy Tomova, *Compressing thin spheres in the complement of a link, math.GT/0404282, 2004.*

widthは、k-widthへ拡張されている。

1-widthは、通常のwidthと同じで、z軸に垂直な全ての平面を同値類（Kと横断的なまま移り合う）でまとめ、各代表元とKとの交点数の和とするものである。

2-widthは、xy平面に垂直な全ての平面とKとの交わりから同様に定める。

3-widthは、全ての平面とKとの交わりから同様に定める。

4-widthは、全ての平面と球面とKとの交わりから同様に定める。

Joel Hass, J. Hyam Rubinstein, Abigail Thompson, *Knots & k-width*, math.GT/0604256

Theorem (Hass-Rubinstein-Thompson)

For any constant n, only finitely many knots in $\mathbb{R}^3$ have 2-width less than or equal to n.

Theorem (Hass-Rubinstein-Thompson)

The only knots with 2-width less than or equal to 10 are the trefoil and the unknot.

Theorem (Hass-Rubinstein-Thompson)

The $(2,n)$-torus knot K has 2-width $2n+4$.

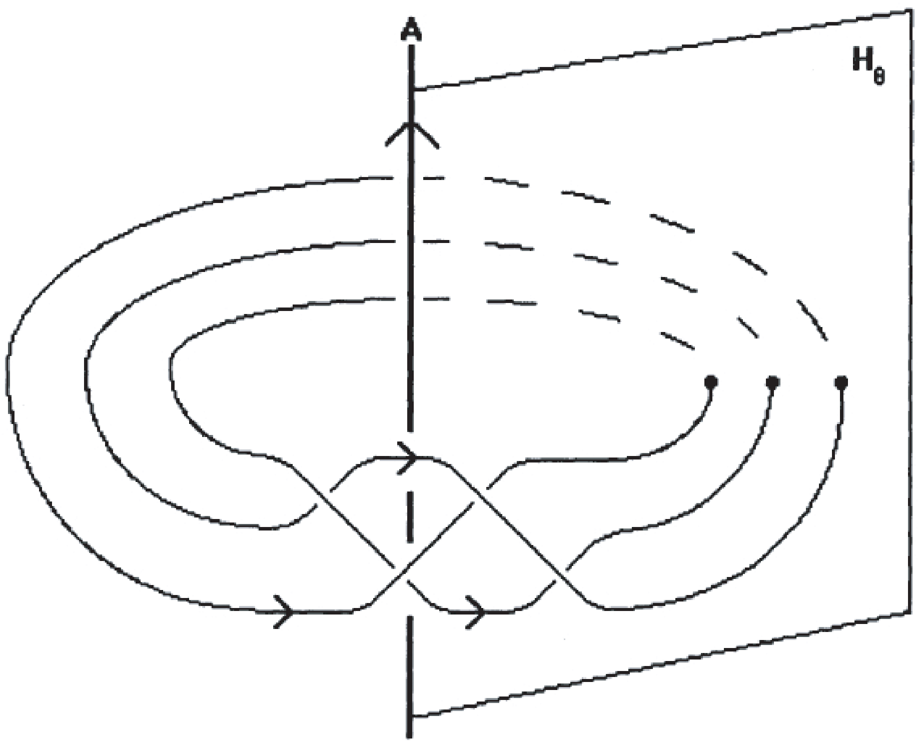
Theorem (Hass-Rubinstein-Thompson)

If γ is a C^2 curve immersed in the plane with total curvature x then $w_2(\gamma) > Cx^{2/3}$, where $C = 1/(2\pi)^{2/3}$.

(b) Braid presentation

$f : S^3 - A \to S^1$
s.t. f, $f|_K$ ともに critical value を持たない

A : axis（K と交わらない unknotted loop）
$H = \bigcup H_\theta$: fibration on $S^3 - A$
F : surface spaned by K



(a) closed 3-braid representative
of the Figure 8 knot

Markov surface

(Mi) A intersects F transversally in a finite set of points $p_1, \ldots, p_k$ which we will refer to as "vertices." There is a neighborhood on F of each vertex which is foliated radially.

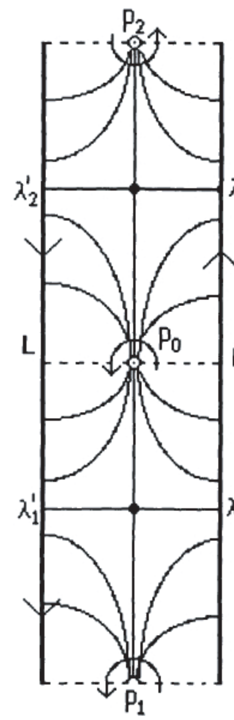
(Mii) All but finitely many fibers H_θ of H meet F, transversally, and those which do not (the singular fibers) are each tangent to F at exactly one point in the interior of both F and H_θ. Moreover, the tangencies are assumed to be either local maxima or minima or saddle points.

(Miii) There are no simple closed curves in the foliation of F. If H_θ is a non-singular fiber, then each component of $H_\theta \cap F$ is an arc.

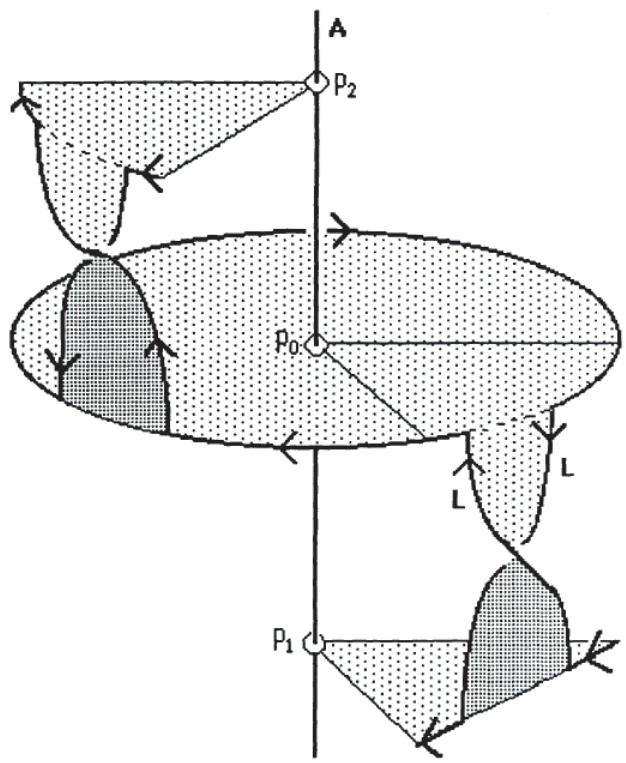
(Miv) An arc of intersection of F with a non-singular fiber of H never has both of its endpoints on K.

It follows from (Miv) that the arcs in $F \cap H_\theta$ for non-singular H_θ are restricted to two types:

a-arcs: one endpoint is on A and the other is on K,
b-arcs: both endpoints are on A,

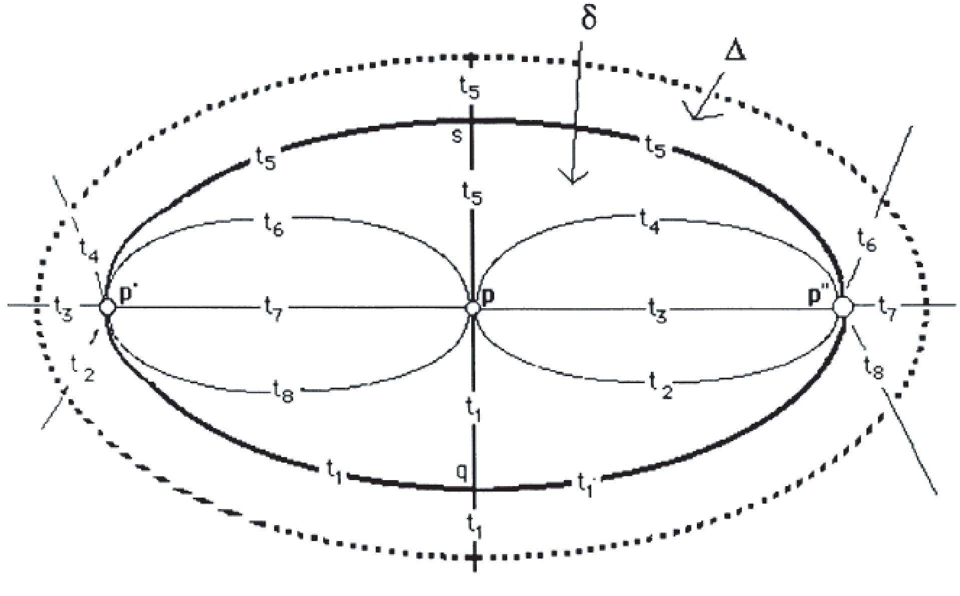


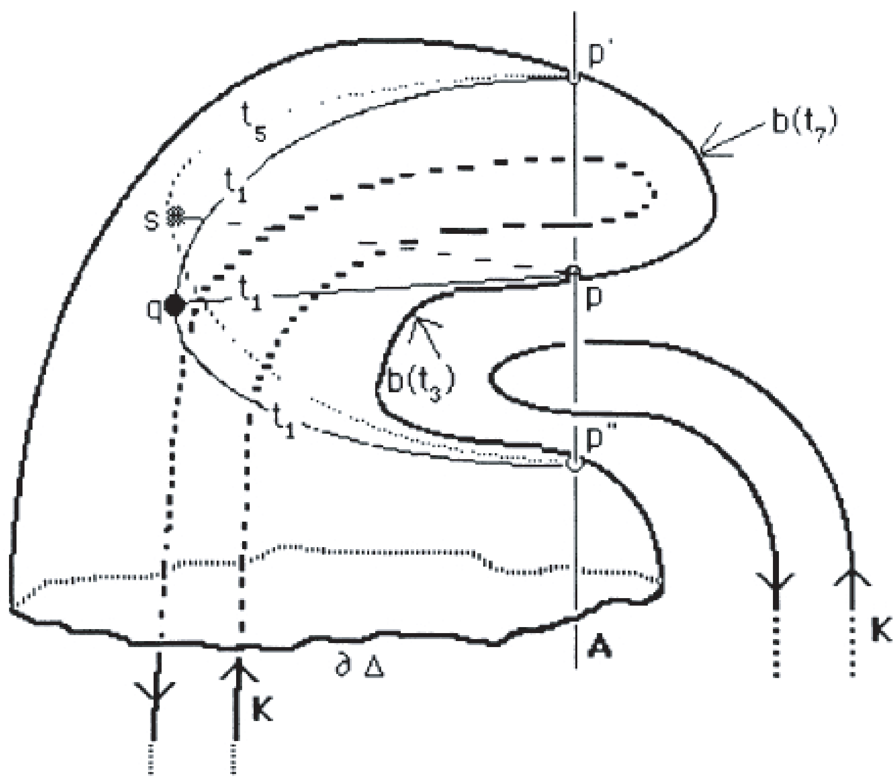
P_0 is a vertex of type **aa**

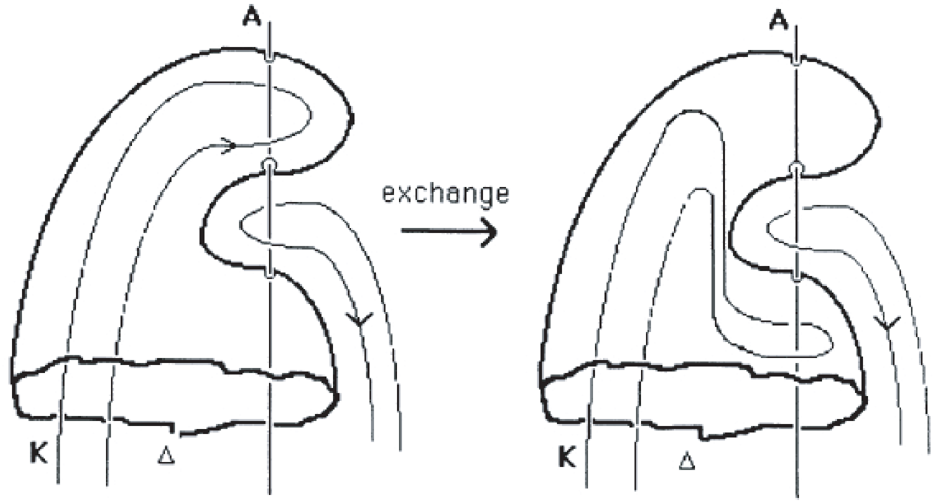


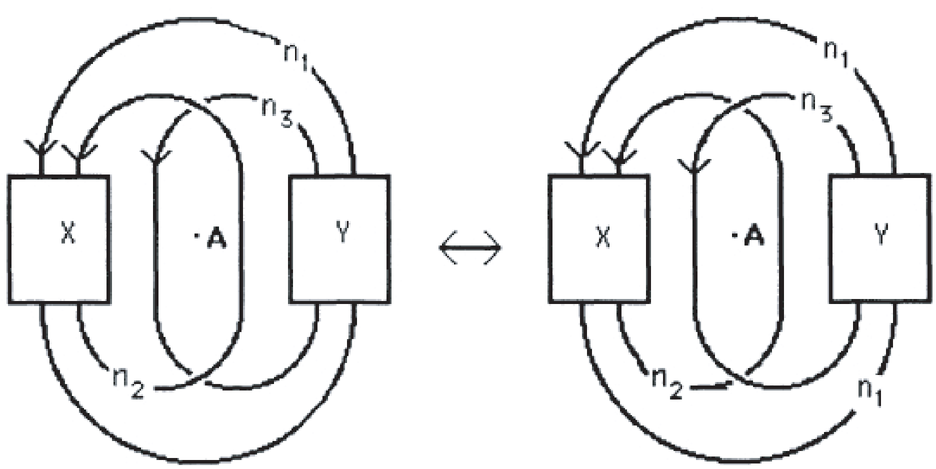
(Mv) Every b-arc in the foliation is essential.

(Mvi) No component of F is trivially foliated.


δ
Δ
t_5
s
t_5
t_5
t_5
t_6
t_4
t_4
t_6
p'
p
p"
t_3
t_7
t_3
t_7
t_2
t_8
t_2
t_8
t_1
q
t_1
t_1
t_1


p'
t_5
$b(t_7)$
t_1
s
q
t_1
p
$b(t_3)$
t_1
p"
A
K
∂ Δ
K


A
exchange
K
Δ
A
K
Δ


n1
n3
X
·A
Y
n2
n1
n3
X
·A
Y
n2
n1

Joan S. Birman and William W. Menasco

Studying links via closed braids I: A finiteness theorem, Pacific Journal of Mathematics 134 (1992), 17-36.

Studying links via closed braids II: On a theorem of Bennequin, Topology and its Applications 140 (1991), 71-82.

Studying links via closed braids III: Classifying links that are closed 3-braids, Pacific Journal of Mathematics 161 (1993), 25-115.

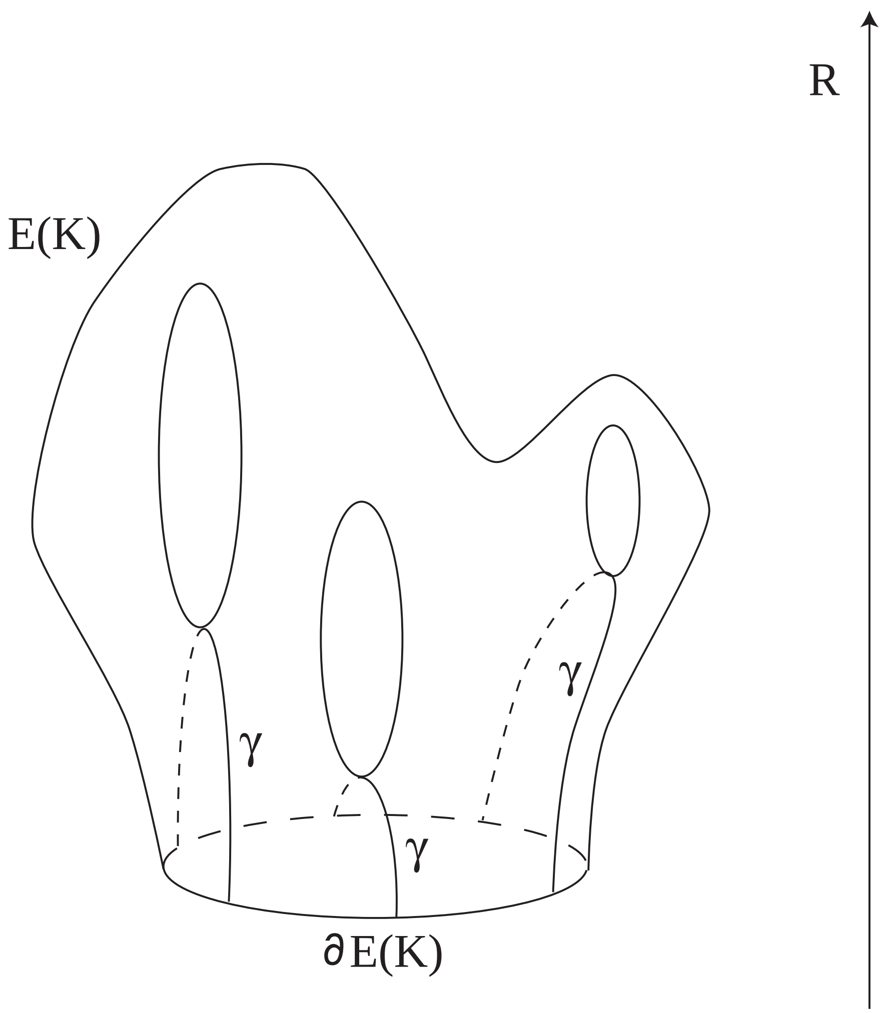
Studying links via closed braids IV: composite and split links, Invent. math. 102 (1990), 115-139. (Erratum, Inv. math. 160, No. 2 (2005), 447-452.)

Studying links via closed braids V: the unlink, Trans. AMS 326, No. 2 (1992), 585-606.

Studying links via closed braids VI: a non-finiteness theorem, Pacific Journal of Mathematics, 156, No. 2 (1992), 265-285.

(c) Unknotting tunnel (Heegaard splitting of knot exterior)

$f : E(K) \to \mathbb{R}$: Morse関数
γ : unknotting tunnel i.e. $E(K)$ − intN(γ)が handlebody



Kがtunnel数 n

$\iff$ $E(K)$が種数$n+1$のHeegaard分解を持つ

$\Rightarrow \pi_1(E(K)) = < x_1, \ldots, x_{n+1} | R_1, \ldots, R_n >$

$\Rightarrow \pi_1(E(K))$のrankは$n+1$以下

即ち、$rank(\pi_1(E(K))) \leq g(E(K)) = t(K) + 1$

Problem

$rank(\pi_1(E(K))) = g(E(K))$?

Yoav Moriah, *Heegaard splittings of knot exteriors*, math.GT/0608137

tunnel number one knotのthin position

Theorem (Thompson)

If $E(K)$ does not have any essential meridional planar surface, then any thin position of K is a minimal bridge position of K and vice versa.

A. Thompson, *Thin position and bridge number for knots in the 3-sphere*, Topology, 36 (1997) 505-507

Theorem (Gordon-Reid)

Let $K \subset S^3$ have tunnel number 1. Then $E(K)$ does not have an essential meridional planar surface.

C. McA. Gordon, A. Reid, *Tangle decompositions of tunnel number one knots and links*, J. Knot Theory and its Rami. 4 (1995) 389-409

Theorem (Kobayashi)

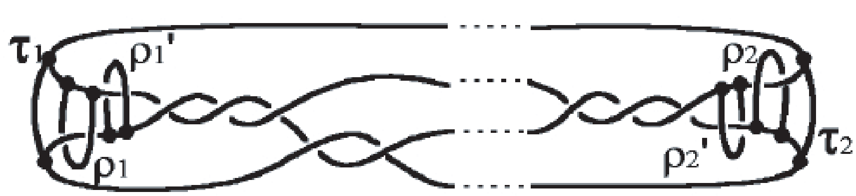
Any unknotting tunnel for a 2-bridge knot is one of 6 known types.

T. Kobayashi, *Classification of unknotting tunnels for two bridge knots*, from: "Proceedings of the 1998 Kirbyfest", Geometry and Topology Monographs, 2 (1999) 259-290.

Theorem (Morimoto)

If an unknotting tunnel for a 2-bridge knot can be put into a level sphere, then it is one of the 6 known types.

K. Morimoto, A note on unknotting tunnels for 2-bridge knots, Bulletin of Faculty of Engineering Takushoku University, 3 (1992) 219-225



Theorem (Goda-Scharlemann-Thompson)

If $K \subset S^3$ is a tunnel number one knot in minimal bridge position and γ is a tunnel for K, then γ may be slid and isotoped to lie entirely in a level sphere for K.

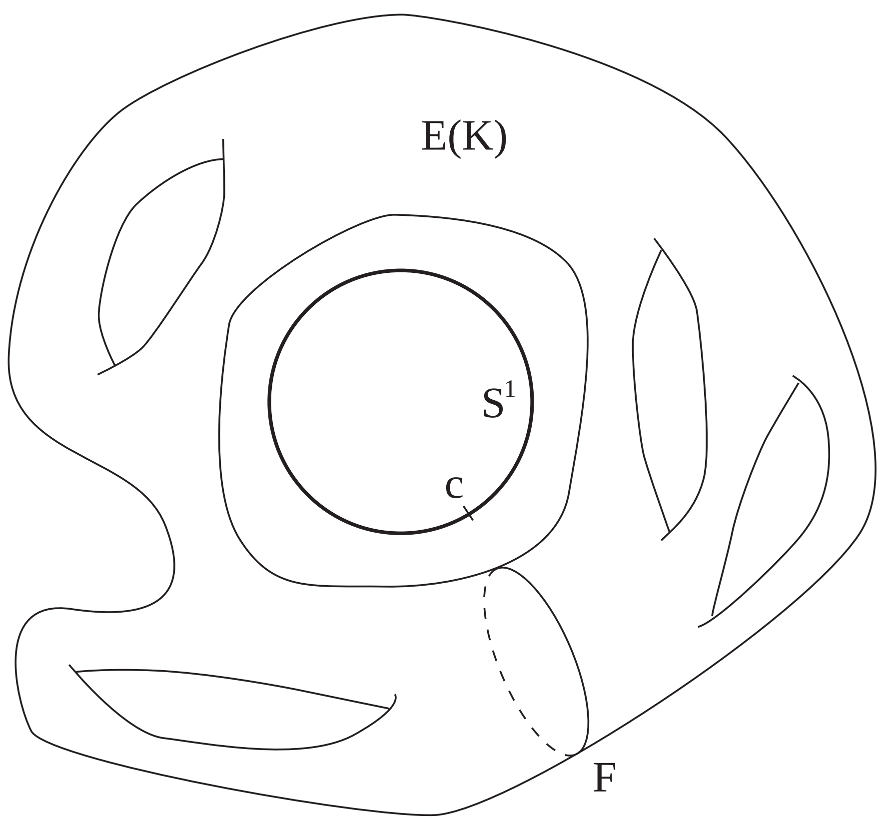
Hiroshi Goda, Martin Scharlemann, Abigail Thompson, *Levelling an unknotting tunnel*, Geometry & Topology, Volume 4 (2000) 243-275. math.GT/9910099

Problem

一般に、unknotting tunnel systemとthin positionの関係を調べよ。

(d) Fibered knot (Circle valued Morse theory)

$f : E(K) \to S^1$: Morse関数
$c \in S^1$: regular value of f
$F = f^{-1}(c)$: Seifert surface



Morse-Novikov number

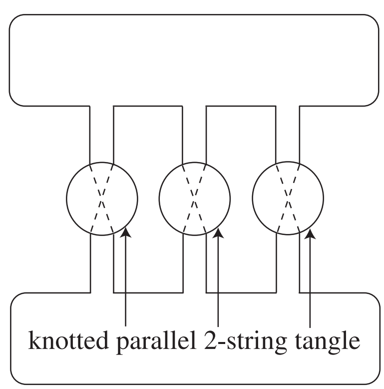
$MN(K) = \min\{\text{critical points} | f : S^3 - K \to S^1\}$

$MN(K) = 0 \iff K$ is a fibered knot

Question (Hirasawa-Rudolph)

Does there exist a knot K with $MN(K) > 2g(K)$?

Mikami Hirasawa, Lee Rudolph, *Constructions of Morse maps for knots and links, and upper bounds on the Morse-Novikov number*, math.GT/0311134



これは反例になるのでしょうか？

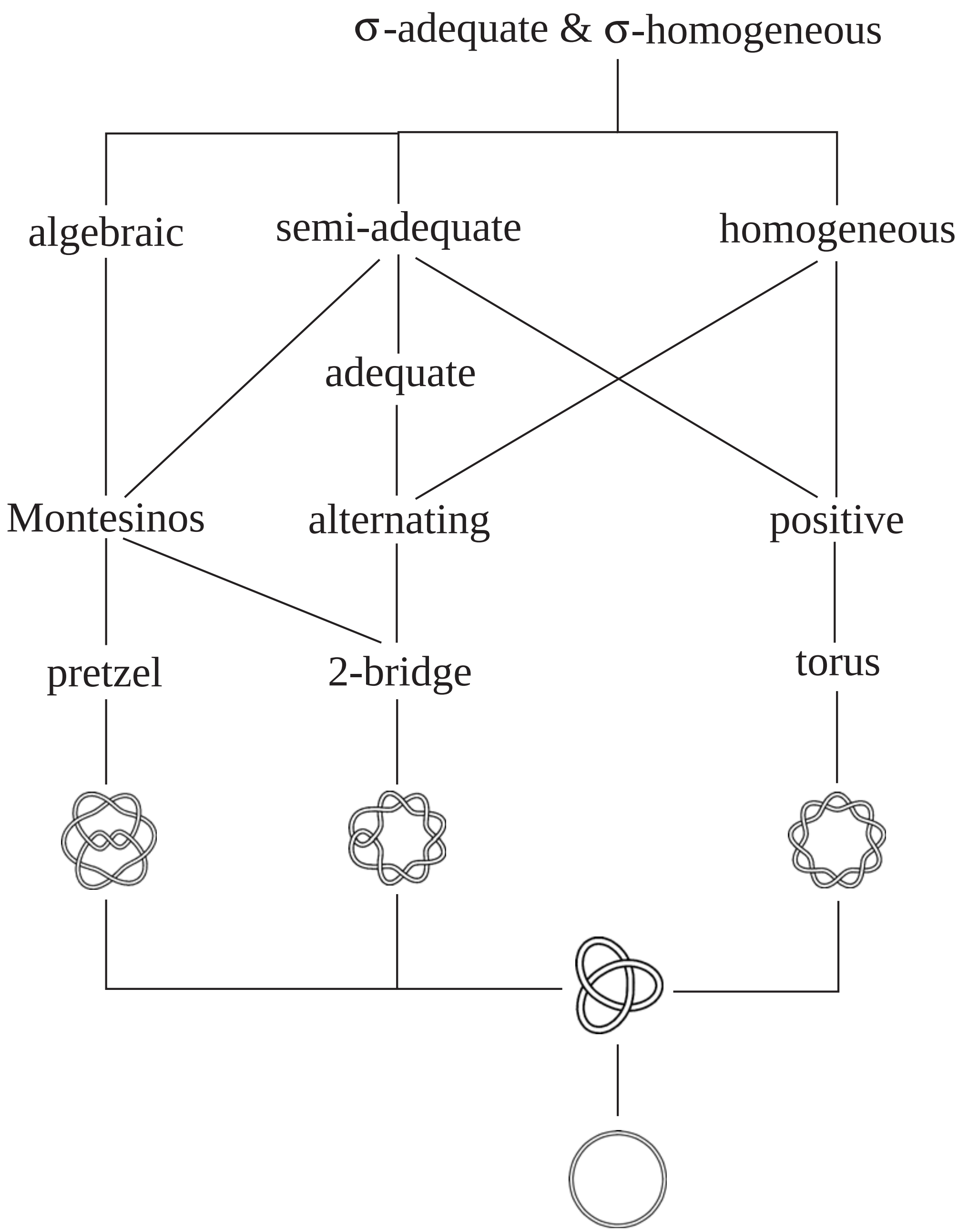
Remark.

一般に、曲面Fが与えられたとき、Morse関数

$$f : E(K) - \mathrm{intN(F)} \to \mathbb{R}$$

が考えられる。

4. Diagram



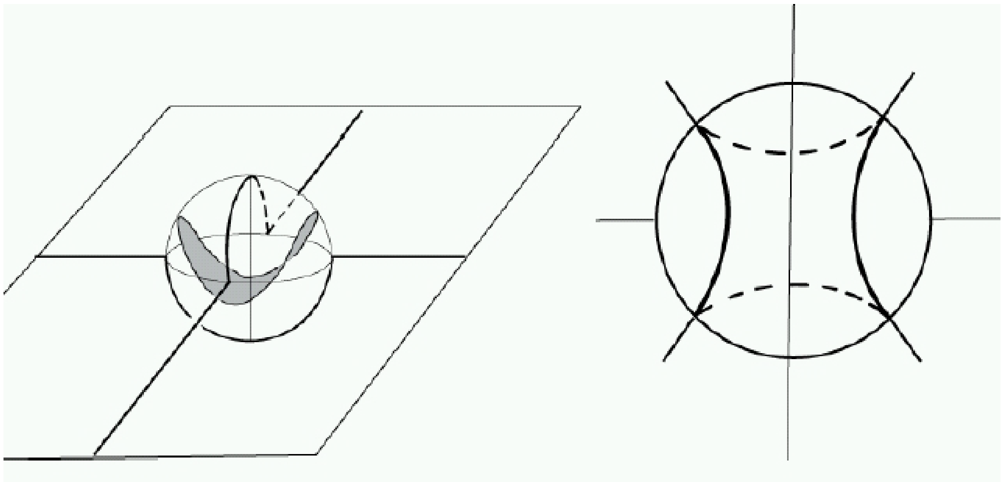
σ-adequate & σ-homogeneous
algebraic
semi-adequate
homogeneous
adequate
Montesinos
alternating
positive
pretzel
2-bridge
torus

Determining Problem

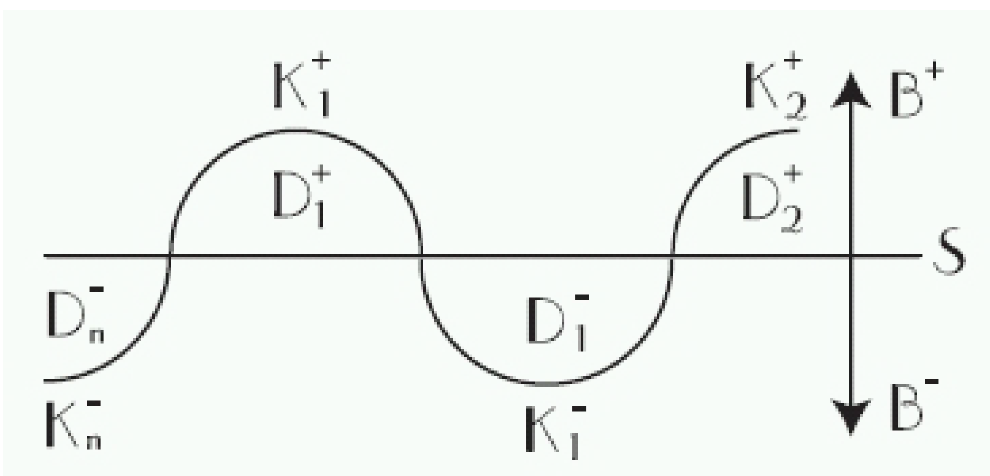
結び目Kの性質を、Kの正則表示Dから判定できるか？

- splittability
- triviality
- primeness
- fiberness
- tangle decomposition
- closed incompressible surface

Alternating knot



Positive knot



σ-adequate & σ-homogeneous