Waist of knots
～巻き付き数の一般化として～

小沢　誠（駒澤大学　総合教育研究部）

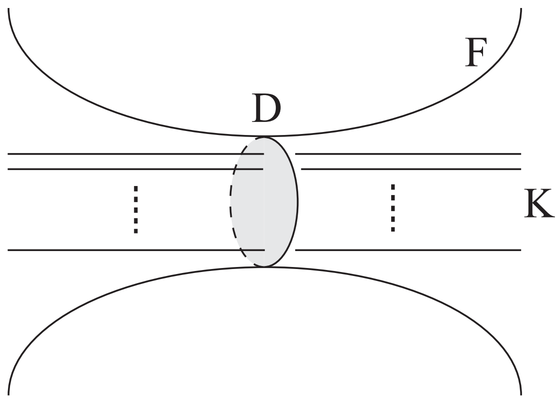
2007年12月24日

１．定義と例

$K \subset S^3$：結び目
$F \subset S^3 - K$：圧縮不可能閉曲面
D：F の S^3 内での圧縮ディスク
K の**ウエスト（waist）**を以下で定義する。

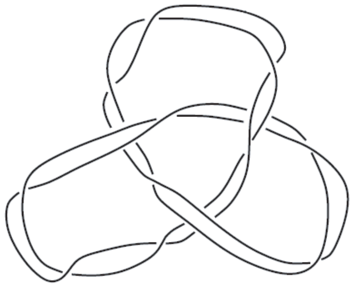
$$w(K) = \max_F \min_D |D \cap K|$$

自明な結び目 K に対しては、$w(K) = 0$ と定める。



代数的な巻き付き数の一般化は以下の論文で定義されている。
Synchronism of an incompressible non-free Seifert surface for a knot and an algebraically split closed surface in the knot complement, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 3, 919-922.

例１． 三葉結び目 3_1 の (p,q) ケーブル結び目 $3_1(p,q)$ について、$w(3_1(p,q)) = p$ である。



$3_1(2,-5)$ borrowed from Wikipedia

問題１

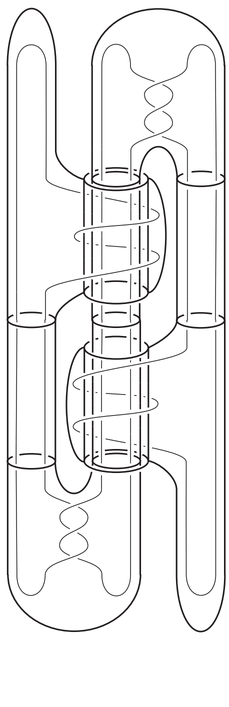
一般に、結び目 K をコンパニオン結び目に持つサテライト結び目 K' について、

$$w(K') = \mathrm{wrap(K') \times w(K)}$$

が成り立つか？

$w(K') \geq \mathrm{wrap(K') \times w(K)}$ は成り立つ。
よって、$w(K_1 \# K_2) = max\{w(K_1), w(K_2)\}$ である。

例２． 2 橋結び目 K に対しては、$w(K) = 1$ であるが、3 橋結び目 K で $w(K) = 2$ のものが存在する。



２．ウエストが１の結び目とその性質

$w(K) = 1$ の結び目

- 2 橋結び目
- トーラス結び目
- スモール結び目
- 交代結び目（Menasco）
- 概交代結び目（Adams et al）
- トーラス交代結び目（Adams）
- 3 ブレイド結び目（Lozano-Przytycki）
- モンテシノス結び目（Oertel）

代数絡み目補空間内の圧縮不可能かつメリディアン的圧縮不可能閉曲面は分離的であることを示すことにより、次を得た。

定理１

K：代数結び目 $\Rightarrow w(K) = 1$

系

双曲的代数結び目はMenasco-Reid 予想を満たす。即ち、結び目補空間に埋め込まれた全測地的閉曲面が存在しない。

$E(K)$：結び目外部
$F \subset E(K)$：適切に埋め込まれた曲面
F が**自由** $\iff$ $E(K)$ を F で切り開いた各成分がハンドル体

定理２

K：$w(K) = 1$ の結び目
F：有限スロープの境界を持つ圧縮不可能かつ境界圧縮不可能曲面
$\Rightarrow F$ は自由

問題２

逆は成り立つか？即ち、有限スロープの境界を持つ任意の圧縮不可能かつ境界圧縮不可能曲面が自由ならば、$w(K) = 1$ か？

３．橋数によるウエストの評価

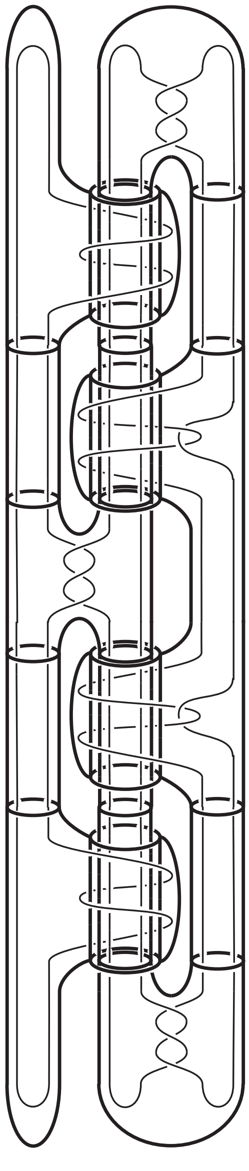
定理３

K：結び目

$$w(K) \leq \left[\frac{2b(K)}{3}\right]$$

定理３の評価は最良である。実際、任意の橋数に対して、等号を満たす結び目 K が存在する。

定理３は、圧縮不可能閉曲面のウエストという結び目補空間の**曲面の性質**と、橋数という結び目の**位置の性質**の関係を示唆している。



４．予想

[Menasco]、[Adams et al] の結果より、次が予想される。

予想１

K：概 m 交代結び目
$\Rightarrow w(K) \leq m$

予想２

K：圧縮不可能チェッカーボード曲面を持つ結び目
$\Rightarrow w(K) = 1$

[Lozano-Przytycki] の結果より、次が予想される。

予想３

K：結び目

$$w(K) \leq \left[\frac{\mathrm{braid(K)}}{2}\right]$$

５．証明

タングル (B,T) 内の曲面 $F \subset B - T$ が圧縮不可能、メリディアン的圧縮不可能、かつ境界非平行のとき、**本質的**であるという。

$\mathcal{ES}(B,T) = \{F \subset B - T$：本質的曲面$\}$

定理１の証明は次の補題から従う。

補題１

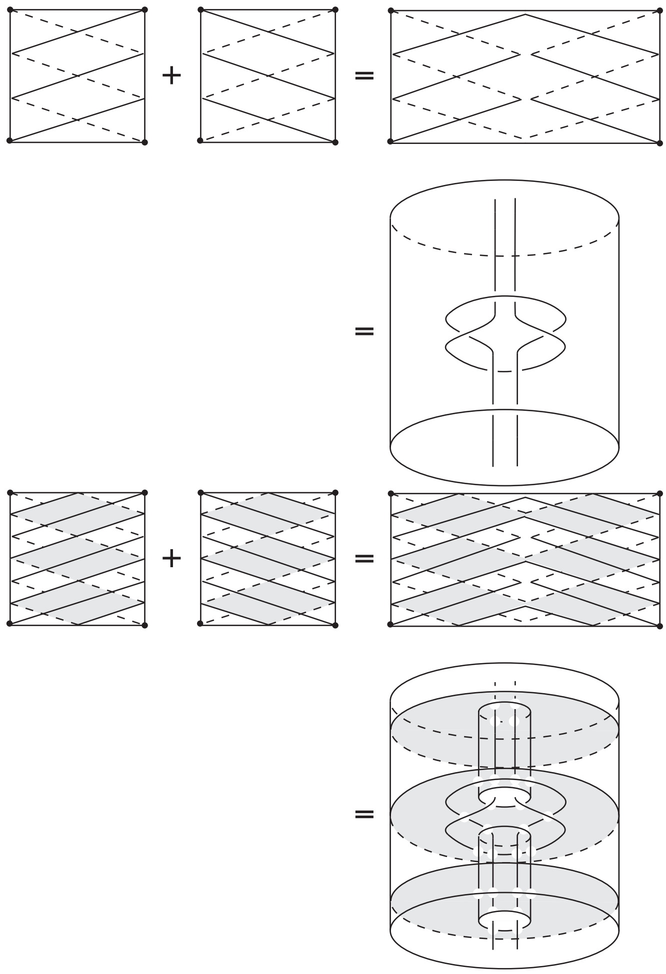
(B,T)：代数タングル
$\Rightarrow$

1. $\mathcal{ES}(B,T) \neq \emptyset$
2. $^\forall F \in \mathcal{ES}(B,T)$ は分離的
3. $^\forall F \in \mathcal{ES}(B,T)$ の境界スロープは一意的

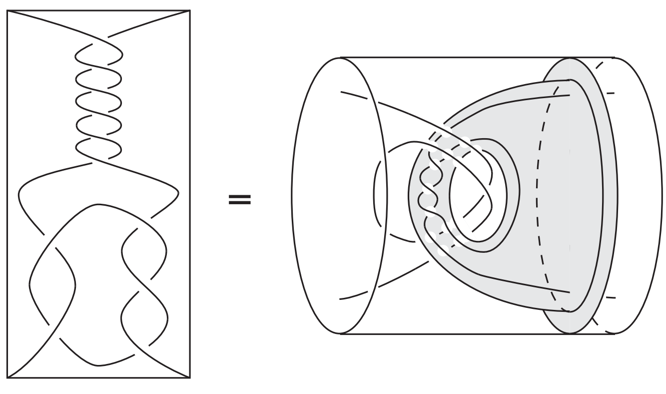
補題１より、有理タングルだけでなく、任意の代数タングルにもスロープが定義できる。

補題１より、代数絡み目補空間内の圧縮不可能、メリディアン的圧縮不可能閉曲面は分離的であることが分かる。

例3． $\frac{1}{3}+\left(\frac{-1}{3}\right)=0$



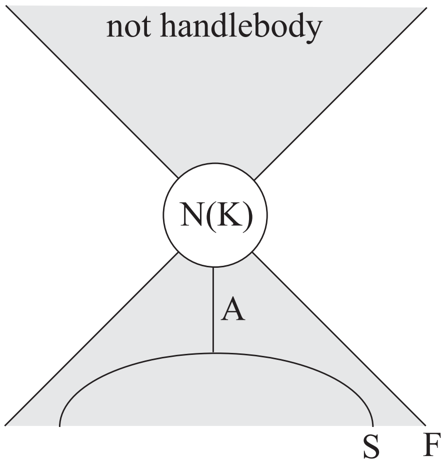
例4． $\dfrac{1}{\frac{-1}{\frac{1}{2}+\frac{-1}{3}}+6}=\infty$



an algebraic tangle borrowed from Wu

定理２の証明

有限スロープの境界を持つ圧縮不可能かつ境界圧縮不可能曲面 $F \subset E(K)$ で、自由でないものが存在したとする。$E(K)$ を F で切り開いた成分のうち、ハンドル体でないものが存在する。従って、$E(K) - F$ 内に圧縮不可能閉曲面 S が存在する。$w(K) = 1$ より、S と $E(K)$ のメリディアンを繋ぐアニュラス A が存在する。F の圧縮不可能かつ境界圧縮不可能性から、$A \cap F = \emptyset$ としてよい。ところが、これは F の境界スロープが無限（メリディアン）であることを意味する。



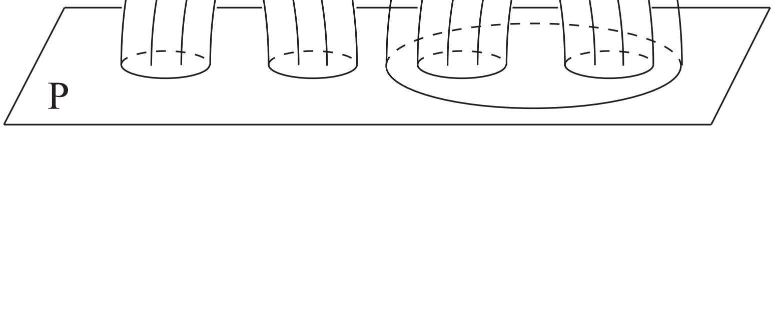
定理３の証明は次の補題から従う。

補題２

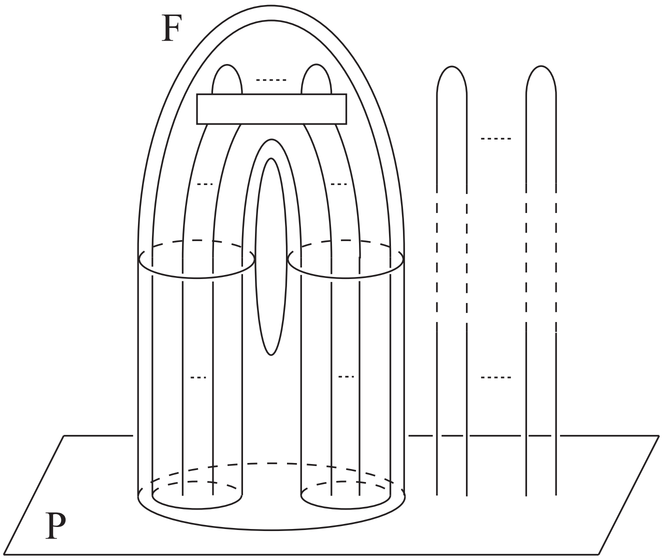
$K \subset S^3$：結び目
$F \subset S^3 - K$：圧縮不可能閉曲面
$\Rightarrow \exists\, P$：球面 s.t.

1. $|P \cap K| \leq 2b(K)$
2. P は次の I、II、III のいずれか

I. m annuli, n annuli and p disks



II. m annuli and an once punctured torus



III. m annuli and a pair of pants